

# 洛书结构的数学审计与算子接口

王建明

2026 年 10 月 12 日

## 摘要

本文将洛书研究组织为可复算的数学审计与算子接口整理。正面主张是：数字标号的分类与几何算子的作用需要分别定义，二者通过明确读出、压缩及误差算子连接。三阶幻方分类为已有成果，本文给出自足重证；在指定整数、零和、互异及最小幅值条件下，正常洛书只有一个  $D_4$  轨道。双三态整数读出模型内，最小互异范围要求系数绝对值为 3、1。

在固定的二维 8 线、三维 49 线实网格上，集中比较幻线求和、中点差分、标量势梯度和边流散度的核。实数域三维全线零和核为零，中点核为四维仿射场；模 3 时两种方程相同，核均为四维。给定洛书及配套整数读出，有限域商投影可将 27 个状态三对一复现九宫，但不自动选择洛书。坐标复制满足精确 Galerkin 恒等式  $T^T L_3 T = 5L_2$ ；商投影闭合缺陷秩 7，欧氏

算子范数为  $\sqrt{(175 + 29977)/27} \approx 3.590825$ ，并给出隐藏通道的条件性误差界。432 个仿射双射和 512 种正常层堆叠分别完整枚举。

八卦、五行和干支配置是传统文献输入 (H)，不是数学分类推出的字典。傅里叶、振动及附录紧束缚结果依赖显式模型选择 (M)，同条件的非洛书对照用于辨别专属性。全文不拟合观测数据，仍包含模型选择及目标构造；独立选择洛书、隐藏通道可控消去及传统拓扑的物理作用量保留为开放问题 (O)。本文交付可比较、可压缩、可检验的有限算子对象，不将其数学一致性等同于自然界或基本粒子对应的证据。

**关键词：**洛书；三阶幻方；八卦；干支；离散投影；约束核；闭合误差；傅里叶变换；动力学

## 1 问题、范围与研究纪律

洛书包含一个可完全求解的有限组合核心，也被用于多种传统象数配置和现代模型。研究这些联系，需要区别五种对象：格点位置、数字标号、卦象或干支标签、状态变量，以及作用于状态的算子。对象之间有双射不等于其运算同构，静态约束也不等于时间演化。

本文采用以下证据分层：T 表示附证明的数学结果；E 表示明确有限范围的完整枚举或数值核查；H 表示有文献依据的传统配置；M 表示为研究目的明确选择的模型；O 表示尚未推出或未确定的问题；N 表示在指定假设下不成立的候选命题。E 中的浮点核查不替代无限域证明，H 不替代物理证据，M 不自动具有唯一性。混合标签按依赖关系理解：H 或 M 提供配置与模型前提，T 说明在这些前提下证明的结论；T 不把前提升级为自然定律，也不表示已经获得全文无误保证。摘要、表头、图注和单独摘引的结论均应保留决定结论的前提。

研究范围包括整数和实数三阶幻方、最小三态原型、二元卦象编码、十与十二计数器、三阶三维网格、实数线性投影与有限域商投影，以及有限算子模型。它不包括对全部术数学派、全部高阶幻方、所有晶体或基本相互作用的穷尽分类。“完整”指所列定义下的通解、枚举域及投影信息量完整，不能解释为一切可能关联均已穷尽。

三阶幻方构造及计数已有专门研究 [1, 2, 3, 4]；文献 [4] 的弱幻方口径与本文九项互异要求不同。本文使用这些文献定位已有成果，并给出自足证明；独立重算不构成首创性声明。本文对前期洛书论证 [12] 作修订，并与晶胞统一框架的公开记录 [13] 及作者提供的同题研究稿核对接口；不将同一作者路线的重算称为独立第三方验证。传统部分使用《说卦》《系辞》及后世象数文献 [5, 6, 7, 8]，不依据图名相同就断言历史因果关系。

本文的集中交付包括：§6.2a 的约束空间分类表；§7.1b 与 §7.3 的精确压缩、缺陷谱及条件性误差控制；命题 2、8 的有限枚举。它们将“是否能作标号约束”与“是否能作动力学算子”分开检验。静态等和存在障碍，不妨碍在明确模型中使用共线图拉普拉斯。本文不对这些整理作未经文献查证的首创性声明。

## 1.1 三态的运算类型与跨域读出

本文的实坐标三态  $E = \{\underline{1}, 0, 1\}$  属于实数空间，平移可写成  $\{0, 1, 2\}$ ；使用普通加法、实直线与欧氏距离。有限域  $F_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  使用模 3 运算，可选 0、1、2 或  $\underline{1}$ 、0、1 作代表元。符号集合相似不决定代数规则：在实数中  $1 + 2 = 3$ ，在  $F_3$  中  $1 + 2 = 0$ ；将实坐标平移 1 并不自动把实几何改成有限域几何。

第 7.1a 节依次使用三种运算： $\pi$  及数字分量在  $F_3$  上定义；将分量取 0、1、2 代表值后， $N = 1 + 3U + v$  以普通整数运算读出； $P_\pi = C/3$  则是  $\mathbb{R}^{27}$  到  $\mathbb{R}^9$  的实线性平均。最后一步不能在  $F_3$  中执行，因为  $3 = 0$  没有乘法逆元。全文的实数秩、有限域秩、整数读数及几何直线均按对应类型解释。

## 2 洛书的完整线性结构

### 2.1 定义与中心定理

**定义 1。**三阶实数幻方  $X$  是  $3 \times 3$  实矩阵，三行、三列及两条主对角线的和同为  $S$ 。整数幻方要求各项为整数；正常幻方要求各项恰为 1 至 9 各一次。三阶零和矩阵要求上述八条线的和全部为 0。

**定理 1 (中心与互补, T)。**任何三阶幻方中心  $c$  满足  $S = 3c$ ；关于中心相对的任意两格之和为  $2c$ 。

**证明。**四条经过中心的线之和为  $4S$ ，它们覆盖每个非中心格一次和中心四次。因此  $4S = 3S + 3c$ ，得  $S = 3c$ 。每条过中心线两端的和为  $S - c = 2c$ 。证毕。

因此整数幻和被 3 整除，减去  $c$  即可将幻方中心化为零和矩阵。这里的“互补”是整数加法关系，不先验等同于卦象、物质与反物质或电荷共轭。

### 2.2 通解、格与秩

**定理 2 (完整参数化, T)。**全体三阶实数幻方为  $X = cJ + M(a, b)$ ，其中  $J$  为全 1 矩阵，且

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & -a-b \\ -2a-b & 0 & 2a+b \\ a+b & -b & -a \end{pmatrix}. \quad (1)$$

整数幻方恰对应  $a, b, c$  为整数。零和约束矩阵  $A_2$  为  $8 \times 9$  矩阵，在有理数或实数上秩 7。

**证明。**中心化后中心为 0。取首行前两项  $a, b$ ，第一行和为 0 给第三项  $-a-b$ ；对心关系确定第三行  $a+b, \underline{b}, \underline{a}$ ；第一列和为 0 给中行首项  $-2a-b$ ；中行末项为  $2a+b$ 。反向代入可验证全部八个线。参数可从矩阵直接读取，故唯一。整数项与整数参数互相推出，整数核为两个整系数基矩阵的自由模。核维数 2，故  $A_2$  秩为  $9 - 2 = 7$ 。证毕。

完整整数幻方格的基可取  $J, M(1, 0), M(0, 1)$ 。固定幻和后只剩二维仿射格。这与把四个带符号符号当作四个自由生成元不同。

### 2.3 互异性与精确可行域

**命题 1 (互异判据, T)。** $M$  的九个值为 0 及四对相反数，四个幅值取  $a, b, a+b, 2a+b$ 。九值互异当且仅当这些幅值非零且绝对值两两不同；等价于下列八个式子均不为 0：

$$a, \quad b, \quad a+b, \quad 2a+b, \quad a-\underline{b}, \quad 3a+b, \quad a+2b, \quad 3a+2b. \quad (2)$$

**证明。**幅值为 0 导致与中心重合，两个幅值相等或相反导致重复。逐对列出四个幅值的差与和，去掉比例相同的式子，即得上述八条排除直线。证毕。

令  $R = \max(|a|, |b|, |a + b|, |2a + b|)$ ，则  $X$  的最小值为  $c - R$ ，最大值为  $c + R$ 。非负整数幻方要求  $c \geq R$ ，正整数幻方要求  $c \geq R + 1$ 。结合八条排除直线，可把整数幻方表示为多面锥中的格点并去掉重合超平面；这是与计数文献 [1, 2, 3, 4] 衔接的自然入口，而不是新的物理公理。

## 2.4 最小性与正常唯一性

**定理 3 (指定零和条件下的最小阶,  $T$ )**。要求方阵全部行、列及两条主对角线零和。在整数或任意非平凡的无 2 挠阿贝尔群上， $1 \times 1$  及  $2 \times 2$  只有零解， $3 \times 3$  存在非零解。无 2 挠指  $2g = 0$  仅在  $g = 0$  时成立。

**证明。** 1 阶显然。2 阶由行列零和必为  $(\begin{smallmatrix} t & -t \\ -t & t \end{smallmatrix})$ ，对角线要求  $2t = 0$ ，故  $t = 0$ 。在所选群中取任一非零元素  $g$ ， $M(g, -g)$  非零且满足 3 阶所有约束；整数情形可取  $g = 1$ 。证毕。特征 2 时结论改变，所以系数域是必要条件。

**定理 4 (最小幅值与唯一轨道,  $T/E$ )**。九项互异的整数零和矩阵满足  $R \geq 4$ ； $R = 4$  时恰有 8 个解，在  $D_4$  作用下属于同一轨道。九项互异正整数幻方的最大项至少 9，达到 9 者正是正常洛书的 8 个对称像。

**证明。** 区间  $[-R, R]$  只有  $2R + 1$  个整数，九项互异要求  $R \geq 4$ 。等号时值集必为  $-4$  至  $4$ ，且  $|a|, |b| \leq 4$ 。在 81 组参数中按命题 1 及范围条件完整筛选，得到

$$(\_3, 2), (\_3, 4), (\_1, \_2), (\_1, 4), (1, \_4), (1, 2), (3, \_4), (3, \_2). \quad (3)$$

各组加 5 后都使用 1 至 9。以下给出不依赖枚举的正常洛书分类证明。中心必为 5。如果 9 位于角点，经旋转可放在左上角，设右上角为  $u$ ；通解给中行首项  $u - 4$ 、末行中项  $u + 4$ 。两者均须在 1 至 9 之间，迫使  $u = 5$ ，与中心重复，矛盾。因此 9 只能在边中点。

旋转使 9 位于上中格，通解给矩阵  $(\begin{smallmatrix} u & 9 & 6 \\ 11-2u & 5 & 2u-1 \\ 4+u & 1 & 1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & -u \\ 0 & -u \\ 0 & -u \end{smallmatrix})$ 。范围限制给  $u$  在 1 至 5 之间； $u = 1, 3, 5$  均导致重复，只有  $u = 2$  或  $4$  成立，二者互为左右反射。9 有四个边中点位置，故恰 8 个解且只有一个  $D_4$  轨道。对 1 至 9 全部 362880 个排列独立枚举也恰得 8 解，与解析证明相符。九个互异正整数最大值至少 9，达到 9 必使用 1 至 9。证毕。

幻和 15 由总和 45 除以三行得到，中心 5 由定理 1 得到；所需最优化量是中心化幅值  $R$ 。旧稿使用的另一目标函数予以撤回，详见第 11 节。

## 2.5 指定零和与最小化条件下的三态原型及整数读出

原题中的三个词需分开：“离散”在本节指整数状态；“守恒”特指全部行、列和两条主对角线零和；“唯一”必须说明比较尺度与对称等价。定理 3 证明最小非零方阵阶数为 3，定理 4 证明九项互异、幅值最小的整数解按  $D_4$  等价唯一。它们共同保留原稿可成立的数学核心，不推出任意局部流守恒必然产生洛书。

仅固定  $3 \times 3$  及八线零和时， $M(a, b)$  仍有无限多个整数解，不能直接声称标号唯一。最小阶与最小幅值是不是不同优化问题；九项互异不是零和条件自动附带的性质。

**命题 1a (最小三态原型与双分量读出,  $T/E$ )**。非零整数零和  $3 \times 3$  矩阵的最小幅值  $R$  为 1；达到  $R = 1$  者恰四个，在  $D_4$  下只有一个轨道。任选其中两个线性独立的矩阵  $A, B$ ，九格的有序对  $(A_{ij}, B_{ij})$  恰遍历  $\{\_1, 0, 1\}^2$ ；读出  $5J + 3A + B$  给正常洛书。全部独立有序对恰 8 组，产生全部 8 个正常洛书。

**证明。** 非零整数矩阵的  $R$  至少 1。由通解及  $|a|, |b|, |a+b|, |2a+b|$  均不超过 1，非零参数只能为  $(0, 1), (0, \_1), (1, \_1), (\_1, 1)$ 。旋转将这些解连成同一轨道。取  $q = M(0, 1), r = M(\_1, 1)$ ，四解为  $\pm q, \pm r$ ；直接列九格可验证  $(q, r)$  遍历全部九种三态有序对。独立对正是符号变化与交换后的  $q, r$ ，共  $4 \times 2 = 8$  组。整系数读出保持八线零和，加 5 后九个值为 1 至 9，故均为正常洛书；定理 4 保证已覆盖全部。证毕。

在此双三态读出模型中，若两个系数  $\alpha, \beta$  也要求为整数，且九项互异及最小幅值 4，则  $R = |\alpha| + |\beta| = 4$ 。系数都非零；绝对值  $(2, 2)$  造成重复，因此只余  $(3, 1)$  或  $(1, 3)$ 。这里  $M$  层是

双分量线性读出、整数系数、互异性及最小范围等假设的选择，T 层是在这些假设下推出系数绝对值为 3、1（允许符号与分量交换）。因此 3：1 不是任意拟合参数，也不是脱离这些条件的普适常数；该结果不使用观测数据拟合。它不恢复旧稿“一个单一状态固定读出九种值”的假设：新构造的每格承载两个三态分量。

可据此将原稿核心严谨表述为：在指定直线零和条件下，非零整数方阵最小阶为 3；在三阶整数零和场中，最小幅值三态原型按  $D_4$  等价唯一，而两个独立最小原型的最小互异整数读出给出正常洛书的唯一轨道。此处的“必然性”始终以所列状态、约束和最小化条件为前提。方阵几何、两条主对角线、整数单位、互异性及最大绝对值 R 这个最小化尺度均是输入；本文尚未从一般局部连续性方程或物理作用量推导这些输入。去掉最小幅值， $M(1, 3)$  就给出半径 5 的另一互异零和阵；改用实数状态，非零解可任意缩小而无正的最小幅值。

### 3 对称、组合、编码与矩阵谱

#### 3.1 $D_4$ 轨道与空间对称的区别

顺时针转  $90^\circ$  对参数的作用为  $r(a, b) = (a + b, -2a - b)$ ，左右反射为  $S(a, b) = (-a - b, b)$ 。它们满足  $r^4 = S^2 = 1$  及  $SrS = r^{-1}$ 。九项互异使任意非恒等格点对称都不能固定该标号，所以每个正常洛书的稳定子只有恒等元，轨道大小 8。全体 8 解因而只有一个轨道。

单个数字洛书在正方形  $D_4$  内没有非平凡空间对称；“存在八个对称像”不能写成“单个权重晶胞具有  $D_4$  点群”。转  $180^\circ$  将  $M$  变成  $-M$ ，故数值互补  $X \mapsto 2CJ - X$  已包含在  $D_4$  作用中。

#### 3.2 和 15 组合与给定洛书的三进制分解

1 至 9 中互异三元组和 15 恰有 8 组：159、168、249、258、267、348、357、456。它们恰好对应洛书八条线，给出“取三数凑 15”与井字棋连线的组合对应。枚举域为全部 84 个无序三元组，结论不涉及物理量。

标准方位取  $L = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ 。逐项写  $L - 1 = 3Q + R$ ，有

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

$Q$ 、 $R$  每行每列都含 0、1、2 且九个有序对互异，构成一对正交拉丁方。对本构造，两条对角线的和也都为 3，因此  $Q$ 、 $R$  各自是允许重复值的三态幻方。令  $q = Q - 1$ 、 $r = R - 1$ ，它们各自八条线都和为 0，且  $L = 5J + 3q + r$ 。九个不同读数来自两个三态分量的联合读出，不是一个三态变量单独产生九种值。以行列索引  $i, j$  属于  $F_3$ ，可写  $Q = j - i + 1$ 、 $R = 2(i + j)$ ，取 0 至 2 代表值。线性部分行列式模 3 非零，保证数字唯一。行列等和自动成立，主对角线仍须另验，不能把任意正交拉丁方叠加都称为幻方。

**命题 2（仿射数字读出的完整计数，E）。** 固定  $F_3^2$  位置网格和整数读出  $N = 1 + 3u + U$ ，其中  $u$ 、 $U$  取 0、1、2 代表值；对全部可逆仿射变换  $(u, U) = A(i, j) + b$ ，共 432 个变换中，恰 8 个读出为正常洛书，其余 424 个均不满足整数八线同和。

**枚举范围与核查。**  $GL(2, 3)$  第一列有 8 种非零向量，第二列有 6 种不在其张成直线内的向量，故可逆矩阵 48 个；平移  $b$  有 9 个，总数 432。逐一检验行列式非零、代表值读出、九项互异和八线同和 15，接受数为 8；与定理 4 的全部 8 个正常数组逐一一致。完整程序与接受记录随稿提供。此结论是指定有限构造族的穷举，不赋予变换物理概率，也不提供自动选择机制。

#### 3.3 矩阵谱与二次不变量

令  $u = (1, 0, -1)/\sqrt{2}$ 、 $U = (1, -2, 1)/\sqrt{6}$ ，则  $Mu = \sqrt{3}(2a + b)U$ ， $MU = -3bu$ 。常值向量为  $M$  的零特征向量， $J$  在其方向乘 3 而在正交补为 0。因此

$$\det(\lambda I - x) = (\lambda - 3c)(\lambda^2 + 3b(2a + b)),$$

$$\det x = 9cb(2a + b).$$
(5)

奇异值多重集为  $3|c|$ 、 $\sqrt{3}|b|$ 、 $\sqrt{3}|2a + b|$ ，且

$$|x|_F^2 = 9c^2 + 12a^2 + 12ab + 6b^2.$$
(6)

标准  $L$  的特征值为  $15$ 、 $\pm 2i\sqrt{6}$ ，行列式  $360$ ，平方和  $285$ 。空间旋转或镜像一般不是矩阵相似变换，特征值不必在  $D_4$  轨道内保持；这些谱也不是未定义物理哈密顿量的能谱。

若原矩阵及逐项平方矩阵都要求三阶幻方性质，平方矩阵中心为  $c^2$ 、幻和须为  $3c^2$ 。但一条过中心线  $c - d, c, c + d$  的平方和为  $3c^2 + 2d^2$ ，因此  $d = 0$ 。实数非恒定三阶二重幻方不存在。这与“九个互异完全平方数本身是否能组成普通三阶幻方”不是同一个问题。

## 4 八卦对应：编码、方位与互补必须分层

### 4.1 传统卦象 (H) 与所采用的三位编码

《系辞》包含由两仪、四象到八卦的层级表述；《说卦》讨论卦象配对与方位；后世象数图书进一步将九宫与卦数联系 [5, 6]。这些材料证明传统中存在对应研究，不能单凭文本推出自然界遵循某一现代动力方程。

本文采用从下爻到上爻、阳 1 阴 0 的编码：乾 111、坤 000、震 100、巽 011、坎 010、离 101、艮 001、兑 110。编码集为  $F_2^3$ 。逐爻取反为  $b \mapsto b + (1, 1, 1)$ ，构成乾坤、震巽、坎离、艮兑四对互补卦。

### 4.2 所采用后天配置 (H) 下的方位与配对核对

下表使用南上、北下、东左、西右的图示方向。卦位属于所采用的传统配置 (H)，下爻起、阳 1 阴 0 属于公开编码约定；表中的对应关系不是从幻方方程推导出的传统起源。固定这些输入后，才进行互补与对心的数学核对。

| 方位 (所选图式) | 洛书数 | 卦名 (H 配置) | 编码 (下爻起、阳 1) |
|-----------|-----|-----------|--------------|
| 北         | 1   | 坎         | 010          |
| 东北        | 8   | 艮         | 001          |
| 东         | 3   | 震         | 100          |
| 东南        | 4   | 巽         | 011          |
| 南         | 9   | 离         | 101          |
| 西南        | 2   | 坤         | 000          |
| 西         | 7   | 兑         | 110          |
| 西北        | 6   | 乾         | 111          |
| 中         | 5   | 无三爻卦专属对应  | 不适用          |

震、巽、离、乾、坎、艮的方向在《说卦》方位段 [5] 有明文，兑居西见该段疏文；坤居西南在本文由该段卦序与依次占据八方位的约定补足，并非该段逐字写出。数字采用本文标准洛书，亦可对照后世九宫口诀 [6]。该表是所采用后天图式的形式化，不是从幻和约束独立推出卦名，也不等于完成各图式的历史源流证明。

**命题 3 (后天对心不普遍等于逐爻互补, T/H)。**四组对心数为 (1, 9)、(8, 2)、(3, 7)、(4, 6)，对应坎离、艮坤、震兑、巽乾。仅坎离逐位互补，其余三对不满足逐爻取反。因此“洛书对和 10 就是后天八卦阴阳全反”不成立。

《说卦》的天地、山泽、雷风、水火配对，可与常用先天互补配置相接 [5]，但不能悄然替换为后天方位。若只保留四组对心配对而不指定卦位，将其匹配到四组互补卦共有  $4! \times 2^4 = 384$  种双射，说明配对结构不足以决定唯一卦数对应。

### 4.3 运算与几何障碍

八个环周位置可以按顺序构成  $C_8$ ；卦象按异或构成  $C_2^3$ 。前者含阶 8 元素，后者所有非零元素阶 2，故二者不是群同构。八卦顶点的汉明立方图每点度 3，环周图每点度 2，也不是图同构。把两者一一编号不会消除这些差异。八方位也不能直接解释为三维周期晶格的八重旋转：周期晶格的旋转阶数受晶体学限制 [11]；这里的限制不讨论准晶或一般有限图案。

**命题 4（立方八顶点不能直接线性投影成九宫外八格，T）**。不存在把  $\{\pm 1\}^3$  双射投到  $\{\_1, 0, 1\}^2$  去掉中心的线性映射。

**证明。** 目标关于原点对称，任何仿射双射的平移项也必须为 0。考虑投影第一坐标。目标第一坐标的计数为 -1、0、1 各 3、2、3 次。若线性式在八个顶点只取 -1、0、1 且达到  $\pm 1$ ，其系数绝对值之和为 1；从全正号最大值翻转任一非零系数，所得仍须属于这三个值，故每个非零系数只能为 1 或 1/2。因此该坐标只能是一个符号坐标，或两个符号坐标的半和/半差；对应计数分别为 4、0、4 和 2、4、2，均与目标不符。证毕。

这禁止非线性编码或使用整个 27 点网格；它限定的是“八卦三爻立方八顶点直接几何投成洛书外八格”这一具体候选关系。

## 5 干支与五行：可计算的循环，不足以独定动力学

### 5.1 六十甲子的严格同步模型

十干及十二支顺序、六十甲子配表可由香港天文台资料核对 [7]。令  $t$  为整数步，干支状态为

$$g_t = t \pmod{10}, \quad \approx_t = t \pmod{12}. \quad (7)$$

**定理 5（干支周期，T/H）**。同步状态恰遍历 60 个同奇偶配对，最小周期为  $\text{lcm}(10, 12) = 60$ 。

**证明。** 两状态重复要求步差同时被 10 和 12 整除，最小正值 60。同余方程  $t \equiv g \pmod{10}$ 、 $t \equiv \approx \pmod{12}$  可解当且仅当  $g \equiv \approx \pmod{2}$ ；120 个形式配对中恰有 60 个符合。证毕。

这是离散计时器的运动学定义：它没有给出真实时间单位、受力、能量或与天体运动的精确参数关系。数学上也不能将 9 个洛书位置的双射直接扩充为 60 个物理状态而不增加变量。

如果额外引入每步前进一位的八位环周计数器，与 60 步干支钟联合周期为 120。反之，不存在把  $C_{60}$  的生成元映到  $C_8$  生成元的群同态，因为  $C_8$  中该像的阶须同时整除 60 与 8，最大仅为 4。120 是选定联合更新规则的结果，不是洛书预言的新周期。

### 5.2 所采用五行配置（H）与字典差异

将木、火、土、金、水按相生顺序编号 0 至 4，传统相生关系可记为  $j \mapsto j + 1$ ，相克关系可记为  $j \mapsto j + 2$ ，均在模 5 下计算。古籍中的关系陈述可参看《五行大义》卷二 [8]。这建立了两个有向循环，但未定义相互作用强度。

采用甲乙木、丙丁火、戊己土、庚辛金、壬癸水及干的阴阳配对，可把十干状态编码为“五类  $\times$  二类”。这种集合分解不等于按干序更新就是五类与阴阳同时每步各加 1；具体更新必须写清。一般  $C_5 \times C_2$  与  $C_{10}$  虽抽象同构，传统顺序和指定五行字典不必由所选同构保持。

河图生成数字字典见《易学启蒙通释》卷上 [6]：1、6 水，2、7 火，3、8 木，4、9 金，5、10 土；后天九宫字典常以 1 坎水、2 坤土、3 震木、4 巽木、5 中土、6 乾金、7 兑金、8 艮土、9 离火配置。它们对同一数字的属性并不一致。后天九宫五行字典作为本文采用的通行配置输入，其各项归类尚未在本稿逐一完成源流考证；以下数学结论只在这一公开字典下成立。两套字典不在推导中混用。

## 5.3 为什么还没有唯一动力学

给定相生相克图，可以选择离散置换、连续 Markov 过程、振荡网络、非线性反应方程等许多演化。举例令  $P$  为五循环置换矩阵， $M$  类模型

$$Y_t = \alpha(P - I)Y_t + \beta(P^2 - I)Y_t, \quad \alpha, \beta \geq 0 \quad (8)$$

保持总和，非负初值保持非负。其傅里叶模本征值为  $\alpha(\zeta^k - 1) + \beta(\zeta^{2k} - 1)$ ，其中  $\zeta$  为五次单位根。当  $\alpha + \beta > 0$  时，所有非常值模的实部严格为负，因为  $k = 1$  至  $4$  时  $\zeta^k$  与  $\zeta^{2k}$  都不等于  $1$ ，体现趋于均匀的循环混合； $\alpha = \beta = 0$  则所有状态不变。纯置换更新则周期运行，不耗散。两者都可放在同一符号图上，却有不同动力学。

因此，现阶段能严格找到的是干支的同步周期、卦象的编码与置换、五行的关系图；“洛书唯一决定这些体系的物理动力学”仍未成立。要研究真实动力学，还必须给出状态量、时间标度、作用强度、外部驱动与可观测量。

## 6 三维晶胞：三种线条件的区别

### 6.1 三点直线与共线图

**定义 2。**  $V_d = \{-1, 0, 1\}^d$ ，取  $d = 2$  或  $3$ 。三点直线为  $p \sim U, p, p + U$ ，其中  $U$  每个坐标属于  $\{-1, 0, 1\}$ 、不全为  $0$ ； $U$  与  $U$  视为同一方向，且  $U$  非零的坐标上  $p$  必须为  $0$ 。将同一直线内任意两点连边，得简单共线图  $G_d$ 。

**定理 6 (直线与边数,  $T$ )。** 三点直线总数为  $(5^d - 3^d)/2$ ；二维为  $8$  条、 $24$  边，三维为  $49$  条、 $147$  边。

**证明。** 方向有  $k$  个非零坐标时，坐标选择有组合数  $C(d, k)$ ，符号选择除去正反重复为  $2^k - 1$ ，余下固定坐标各有  $3$  种，共  $C(d, k)2^{k-1}3^{d-k}$  条。求和即公式。两点确定直线，同一无序点对不会属于不同三点直线；每条线贡献  $3$  边。证毕。

三维  $49$  条分为  $27$  条轴向、 $18$  条面对角线、 $4$  条体对角线。这里  $a + c = 2b$  首先是位置向量的几何恒等式： $a$ 、 $c$  为端点， $b$  为中点。它本身不是能量守恒，也不是数字标号的等和条件。

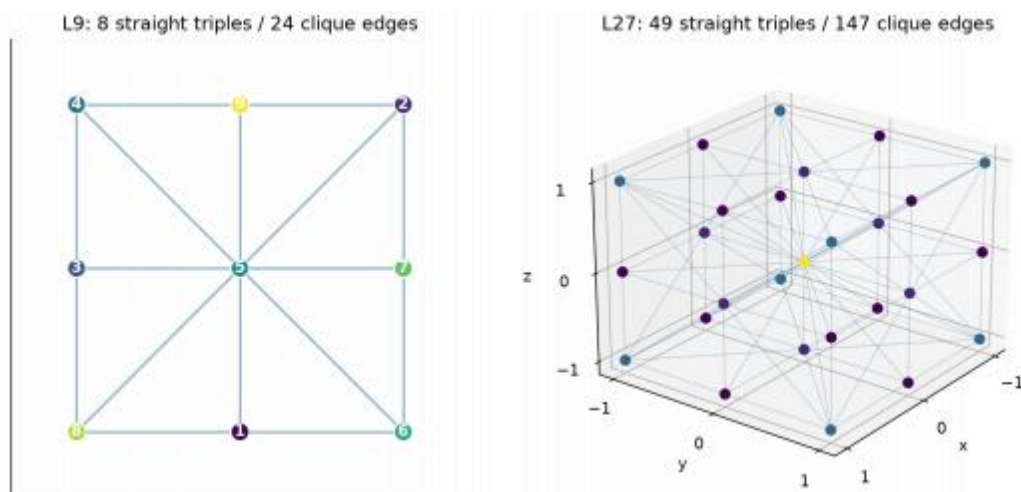


**图 1:** 指定实坐标网格的共线图 ( $T$ )。二维  $8$  线、三维  $49$  线；颜色表示图度数。这是欧氏几何枚举，不是  $F_3$  全部仿射直线，也不指定能量或时间演化。

## 6.2 全线等和与全线中点约束的不同解空间

定义  $S_3$  为  $49 \times 27$  直线求和矩阵，每行在三点上系数均为 1；定义  $D_3$  为中点差分矩阵，每行端点、中点、端点的系数为 1、 $\sqrt{2}$ 、1。两者不能互换。

**定理 7 (全线等和只允许常值标号, T/E)。** 三阶立方上若 49 条线均具有共同和  $S$ ，则每个点标号为  $S/3$ 。等价地  $\ker S_3 = \{0\}$ ， $S_3$  秩 27。

**证明。** 减去  $S/3$  后可设共同和为 0。每个轴平行  $3 \times 3$  截面含行、列、双对角线条件，故是定理 2 的零和矩阵，其中心必为 0。三个中心坐标面内的边中点都是其他截面的中心，因此也为 0。一个零和  $3 \times 3$  矩阵若中行及中列全为 0，参数式强制  $a = b = 0$ ；故三个中心坐标面都为 0。再取  $\approx = \sqrt{2}$  及  $\approx = 1$  两个外层面，它们的中行和中列分别位于上述中心坐标面，因而全零，同理两个外层面都为 0。证毕。

此证明实际只需 27 条轴线与 18 条面对角线；体对角条件冗余。它比“1 至 27 互异的三阶完美幻立方不存在”更强，但只针对本文明确的全截面双对角线定义，不套用于文献中不同的“完美”术语。

**定理 8 (中点约束是仿射场, T/E)。** 在二维或三维  $V_d$  上，对所有三点直线要求  $f(p \cup U) - 2f(p) + f(p + U) = 0$ ，则  $f$  为仿射函数。二维解空间维数 3，三维维数 4； $D_2$  秩 6， $D_3$  秩 23。

**证明。** 轴向二阶差分为 0 使  $f$  对每个坐标分别为一次函数，故三维时可展开为 1、 $\sqrt{2}$ 、 $y$ 、 $\approx$ 、 $xy$ 、 $xz$ 、 $yz$ 、 $xyz$  的线性组合。固定第三坐标的两组面对角条件分别消去  $xy$  项及其随第三坐标变化的  $xyz$  项，其他面同理消去  $xz$ 、 $yz$ ，最后只余 1、 $\sqrt{2}$ 、 $y$ 、 $\approx$ 。仿射场显然满足所有中点式。二维证明相同。证毕。

二维洛书中心化场一般不属于这一仿射核，三阶幻方的零和核维数 2 也不同于中点核维数 3。因此实数域的几何中点约束与标量幻线求和不能混用；流守恒还需要定义在边上的变量。以下统一登记各算子的定义域。

### 6.2a 约束空间的统一分类

**定理 9 (指定网格的约束空间分类, T/E)。** 固定定义 2 的  $V_d$  及其全部 8 条或 49 条欧氏三点线，以  $K = R$  或  $F_3$  为系数域。令  $S_d$  为三点求和， $D_d$  为中点差分；任选边方向， $B_d$  为顶点一边关联矩阵， $G_d = B_d^T$  为势梯度。各齐次核的维数如下。表头“二维、三维”指网格维度，标量场空间分别为  $K^9$ 、 $K^{27}$ ，边流空间分别为  $K^{24}$ 、 $K^{147}$ ； $F_3$  列仍使用同一组欧氏线，不改成全部有限域仿射直线。

| 结构与齐次算子                 | 二维 / R | 三维 / R | 二维 / $F_3$ | 三维 / $F_3$ |
|-------------------------|--------|--------|------------|------------|
| 几何位置恒等式 $a + c = 2b$    | 不约束标号  | 不约束标号  | 不约束标号      | 不约束标号      |
| 标量线和 $S_d f = 0$        | 2      | 0      | 3          | 4          |
| 标量中点 $D_d f = 0$        | 3      | 4      | 3          | 4          |
| 势梯度 $B_d^T f = 0$       | 1      | 1      | 1          | 1          |
| 边流散度 $B_d j = 0$        | 16     | 121    | 16         | 121        |
| 图拉普拉斯 $B_d B_d^T f = 0$ | 1      | 1      | 4 (E)      | 8 (E)      |

**证明与计算证书。** 实数  $S_2$  由定理 2， $S_3$  由定理 7， $D_2$ 、 $D_3$  由定理 8 给出。 $F_3$  中  $\sqrt{2} = 1$ ，故  $S_d = D_d$ ，仿射场证明仍成立，维数为  $d + 1$ 。 $G_d f = 0$  使每条边端点值相同，连通性强制常值，在两域均核维 1。 $B_d$  的列和为 0 且任一生成树的约化关联矩阵行列式为  $\pm 1$ ，故两域均秩  $\geq 1$ ；边流核维  $m \geq 1$ ，分别 16、121。实数图拉普拉斯的能量恒等式使其核为常值。最后一行的  $F_3$  秩由精确模 3 消元得 5、19，核维 4、8，记为 E；整数矩阵及复算程序随稿提供。证毕。

几何关系本身没有指定标量场方程，因此第一行不能伪造“几何核”。各核并非一概互异，也不存在覆盖表中所有结构的一般正交结论： $F_3$  上  $S$  与  $D$  完全相同；实数二维零和核与仿射中点核正交，因为行列和为零使该场对 1、 $\sqrt{2}$ 、 $y$  的欧氏内积均为 0；这只是指定算子的结论，不能推广为几何与数字的一般正交性。有限域中的  $BB^T$  也不能用实数正定性替代，连通性不排除表中额外零模。此分类排除的是把不同类型的约束未经定义直接等同；它不否定另加能量、驱动或公设后研究洛书模型。

### 6.3 三十一线正常幻立方的一个明确构造

只要求 27 条轴向线与 4 条体对角线等和，可以构造真正使用 1 至 27 各一次的正常幻立方。令  $\beta(t)$  是  $t$  模 3 的平衡代表值  $-1, 0, 1$ ，定义

$$C(\mathcal{I}, y, \approx) = 14 + 9\beta(\mathcal{I} + y + \approx) + 3\beta(\mathcal{I} + y - \approx) + \beta(\mathcal{I} - y + \approx). \quad (9)$$

**命题 5 (构造可行, T/E)。**  $C$  恰取 1 至 27，各轴线及体对角线之和为 42。

**证明。** 三个线性式的系数矩阵行列式为  $-4$ ，模 3 非零，故其三个平衡三进制数字遍历全部 27 个三元组，组合恰给  $-13$  至  $13$ 。沿任一坐标轴，各线性式系数都非零，平衡代表遍历  $-1, 0, 1$ ，和为 0。体对角线经过原点， $\beta$  为奇函数，端点互补、中心 14，故线和 42。证毕。

本构造只作 31 线定义的明确实例，不宣称是唯一幻立方；也不以相同顶点数将它与 L27 几何图混为同一标号模型。

### 6.4 实坐标平移与有限域状态：两种三态运算

三层正常数字洛书的标号模型与三态坐标晶胞是不同构造。作者提供的同题统一框架研究稿（公开路线记录见 [13]，版本差异见数据声明）采用  $\{0, 1, 2\}^3$  及端点加和等于中点两倍的几何条件；不应以第 7.2 节的数字平均判别否定该几何构造。当两者都作为实坐标时， $\{0, 1, 2\}$  与  $\{-1, 0, +1\}$  逐坐标相差 1，是等价的平移约定；采用模 3 运算是另一个建模步骤，不能仅依据坐标符号判定。

**命题 5a (三态几何接口, T/E)。** 设  $A, B, C$  依次为任一三点直线的端点、中点、端点，则  $A + C = 2B$ 。平移坐标后该式保持；任一实仿射读出  $f$  也满足  $f(A) + f(C) = 2f(B)$ ，等价于相对该线中点的三项偏差之和为 0。全部 49 条线均成立，包括面对角与体对角。

这里三点坐标或仿射读出的总和为 3 倍的局部中点值，通常随直线变化，并非所有直线具有同一个全局总和。三维对接成立的内容是几何中点结构，不能把“局部偏差零和”写成“全 49 线原始数字同和”。这与定理 7 没有矛盾。

**命题 5b (模 3 与实数的区别, T/E)。** 若状态值在  $F_3$  中运算， $-2 = 1$ ，因此端点—中点差分式与三点和为 0 是同一个方程。49 线求和矩阵在  $F_3$  上秩 23、核维数 4；其解恰为  $f(\mathcal{I}, y, \approx) = c + \mathcal{I} + \beta y + \approx$  (模 3)，共有  $3^4 = 81$  个标量场。实数上的同一求和矩阵秩 27，不能将该常值性结论套到模 3 状态上。

**证明。** 轴向三点约束使函数对每个坐标分别为一次函数，展开为多仿射多项式；两方向的面角中点约束消去交叉项，过程与定理 8 一致，系数 2 在  $F_3$  中可逆。剩余四个仿射系数任取，故核维数 4，秩 23。证毕。

同样要区别实几何与有限域几何： $\{-1, 0, 1\}^3$  嵌入实空间有 49 条三点直线，而  $F_3^3$  有 117 条仿射直线，后者包含模 3 回绕的额外直线。只写“三态”并不足以决定采用哪种邻接。

第 3.2 节的双三态数字分解也给出精确编码接口：九个  $(q, r)$  组合加一个独立三态  $S$ ，构成 27 个内部状态，读出  $L = 5 + 3q + r$ 。但数字编码到  $(q, r)$  的置换并不保持原洛书格点的全部实共线关系：八条线中仅四条映成实共线三点组。因此“数字编码接口”与“保持欧氏共线图的几何接口”须分别声明。

## 7 二维—三维投影与后续晶胞接口

### 7.1 切片、求和与平均

对三维标量场  $f$  定义中层截面  $R_{\approx} f(\mathcal{I}, y) = f(\mathcal{I}, y, 0)$ ，求和投影  $\Sigma_{\approx} f = \Sigma_{\approx} f$ ，平均投影  $P_{\approx} f = (1/3) \Sigma_{\approx} f$ 。这三种运算不同。一般  $P_{\approx}$  的秩为 9、核维数 18；单张二维图丢失 18 个自由度。

**定理 10 (等和轴投影的障碍, T)。** 若每条竖向三点线都和为  $S$ ，则  $\Sigma_{\approx} f = SJ$ 、 $P_{\approx} f = (S/3)J$ ，不能得到非恒定洛书。

证明直接来自逐列定义。第 6.3 节正常幻立方平均投影因此全为 14。要保留洛书图样，可以选择截面、非均匀深度权重或另一种内部可观测量，但必须明确增加的读出规则，不能称作普通求和投影。

若只指定  $P_{\approx} f = L$ ，则所有解为  $f(\mathbf{I}, \mathbf{y}, \approx) = L(\mathbf{I}, \mathbf{y}) + \eta(\mathbf{I}, \mathbf{y}, \approx)$ ，其中  $\sum_{\approx} \eta = 0$ ；18 维自由度表明二维洛书不能唯一重建三维标量晶胞。即使三个正交平均投影全已知，联合秩也只有 19、共同核维数 8；这是零均值二维因子在三个方向上的张量积形成的不可见子空间。

### 7.1a 给定洛书的有限域商投影与配套整数读出

**命题 5C (给定洛书的商压缩复现, T/E; 投影与读出为构造输入)**。给定标准洛书  $L$ ，选择  $V = F_3^3$  并以  $\{0, 1, 2\}^3$  表示状态，按模 3 定义  $\pi(\mathbf{I}, \mathbf{y}, \approx) = (i, j) = ((\mathbf{I} \_ \approx + 1) \bmod 3, (\mathbf{y} \_ \approx + 1) \bmod 3)$ 。该映射的线性部分在  $F_3$  上秩 2，核由  $(1, 1, 1)$  生成；每个二维位置恰有三个原像  $(i \_ 1 + k, j \_ 1 + k, k)$ ， $k = 0, 1, 2$ ，坐标均取模 3。故它把 27 个状态精确压缩为 9 个位置。

选取与已知  $L$  的数字分解相容的分量  $u = (\mathbf{y} \_ \mathbf{I} + 1) \bmod 3$ 、 $U = (2(\mathbf{I} + \mathbf{y} + \approx) + 1) \bmod 3$ 。先取 0、1、2 代表值，再以普通整数算术读出  $N = 1 + 3u + U$ ；若将这一步也按模 3 计算，则  $3u$  消失，不能给出 1 至 9 九个不同读数。同一纤维上的  $N$  相同；在目标位置  $(i, j)$ ， $u = (j \_ i + 1) \bmod 3$ 、 $U = 2(i + j) \bmod 3$ ，所得二维数组精确为  $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ ，八线和均为 15。九个数字各出现一次，每个数字恰由三个三维状态压缩得到。该中心对齐约定使三维中心  $(1, 1, 1)$  投到二维中心  $(1, 1)$ ，读出为 5；中层  $\approx = 1$  恰为标准洛书，整体读出还满足  $N(\mathbf{I}, \mathbf{y}, \approx) + N(2 \_ \mathbf{I}, 2 \_ \mathbf{y}, 2 \_ \approx) = 10$ 。

**证明。**加上  $(k, k, k)$  不改变  $\pi$ ，也不改变  $u$ 、 $U$  的模 3 值；给定  $(i, j)$  时三种  $k$  给出全部原像。目标二维到  $(u, v)$  的系数矩阵行列式为  $\_4$ ，模 3 非零，故九个数字组合各异。代入九个位置得上述洛书，或直接使用第 3.2 节  $Q$ 、 $R$  分解验证八线同和。证毕。

还可保留第三个三态  $S = \approx$ ，完整编码  $K = 1 + 9S + 3u + U$  恰覆盖 1 至 27；压缩为  $N = 1 + ((K \_ 1) \bmod 9)$ ，清楚显示丢失了哪一个三态信息。这里  $K$  只是完整数字编码，不宣称其在原实空间 49 线同和。

对任意实值三维标量场  $f$ ，以  $C$  表示九个纤维的 0/1 归属矩阵。以下矩阵运算在实数域进行： $P_{\pi} = C/3$ 、 $T_{\pi} = C^T$  满足  $CC^T = 3I_9$  及  $P_{\pi}T_{\pi} = I_9$ 。虽然纤维标签由  $F_3$  商定义，这个平均算子不是有限域中的除以 3。 $P_{\pi}$  秩 9、核维数 18；对上述纤维恒定场  $N$ ， $P_{\pi}N$  恰为洛书。这是具体的线性场压缩算子，不要求每个原坐标层都是正常洛书，也不属于第 7.2 节的三层平均假设。

给定标准洛书，上述选择证明了有限域商投影配合指定整数读出可以压缩复现它；商投影本身没有自动选择洛书。运算边界是： $\pi$  为中心对齐的有限域仿射商投影，九个纤维中只有一个是原有限实立方中的直线，其余含模 3 回绕。因而它与不带回绕的欧氏正交投影有不同几何含义。本次构造先有已知洛书及其  $Q$ 、 $R$  数字分解，再选择  $\pi$  与  $N$  使之相容；它没有进行盲预测或事前注册。规则现已公开，故可复算，但这不把针对目标的构造变成独立发现。更直接地，对任意九宫数组  $g$ ，都可取  $f = T_{\pi}g$  而得到  $P_{\pi}f = g$ 。即使要求中心 5 及反演互补 10，逐行排列的  $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$  也可用同一个  $\pi$  压缩得到，它却不是幻方。因此商投影、中心对齐与互补仍不足以选择洛书。

后续算子接口也需使用这一新  $P_{\pi}$ ：令  $U_{\pi} = C^T/\sqrt{3}$ ，则有效拉普拉斯为  $U_{\pi}^T L_3 U_{\pi} = CL_3 C^T/3$ 。

对原 49 线实共线图，其九节点压缩图是完全图，边权为 1 或  $7/3$ ，并非  $(5/3)L_2$ 。第 7.3 节的 5 倍恒等式专属于沿坐标复制的另一种投影；两者的精确矩阵均随包提供。新商投影也不自动闭合动力学： $P_{\pi}L_3 \_ (CL_3 C^T/3)P_{\pi}$  的最大绝对项为  $8/3$ ；存在  $P_{\pi}\eta = 0$  而  $P_{\pi}L_3\eta$  非零的隐藏场，反例随复算结果登记。

### 7.1b 闭合缺陷的精确谱与条件性误差界

**命题 6 (两种压缩的定量闭合缺陷, T/E)**。所有矩阵运算及范数均在实数域，顶点单位质量，使用标准欧氏范数。对商归属矩阵  $C$ 、 $P = C/3$ 、 $T = C^T$ ，令  $L_{\text{eff}} = CL_3 C^T/3$ ，定义  $D = PL_3 \_ L_{\text{eff}}P$ 。则  $D$  的秩为 7， $DD^T$  的 9 个本征值为

$$0 \text{ (重数 2)}, 2/3, 74/27 \text{ (重数 2)}, 14/3 \text{ (重数 2)}, (175 \_ \sqrt{29977})/27, (175 + \sqrt{29977})/27.$$

因此  $ID_{I_2} = \sqrt{(175 + \sqrt{29977})/27} \approx 3.590825$ ,  $ID_{I_2}^2 = 256/9$ 。D 为  $9 \times 27$  矩阵，此处列出的是平方奇异值，不能称 D 自身的本征谱。

**精确核查。**置整数矩阵  $E = 3CL_3 - (CL_3C^T)C$ ，则  $D = E/9$ ，且  $EC^T = 0$ 。整数算法给出  $EE^T$  的特征多项式

$$x(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 54)(\lambda - 222)^2(\lambda - 378)^2(\lambda^2 - 1050\lambda + 5832)。$$

将其根除以 81 得上述谱，精确消元验证秩 7；程序检查特征多项式展开及矩阵恒等式，浮点值仅作为解析根的近似。这是固定有限矩阵的精确计算证书，不是实验误差估计。

同法对第 7.3 节的坐标平均缺陷  $D_{\approx} = P_{\approx}L_3 - (5/3)L_2P_{\approx}$ ，得到秩 8 及平方奇异值：0,  $2/3$ ,  $98/27$ ,  $(20 \pm 6\sqrt{11})/9$  各重数 2,  $(334 \pm 4\sqrt{4306})/27$  各重数 1。于是  $ID_{\approx}I_2 = \sqrt{(334 + 4\sqrt{4306})/27} \approx 4.700199$ ,  $ID_{\approx}I_2^2 = 1024/27$ 。其整数矩阵证书一并提供。两种范数只在相同的欧氏输入输出归一化下比较；使用  $U^T$  而非  $P$  作读出，数值会相差  $\sqrt{-3}$ 。

**模型内推论 (M/T)。**对指定扩散方程  $f_t = -\hat{h}L_3f$  ( $\hat{h} > 0$ )，设  $g = Pf$ ,  $\eta = (I - TP)f$ ，令  $\hat{g} = -\hat{h}L_{\text{eff}}\hat{g}$  且  $\hat{g}(0) = g(0)$ 。由  $DT = 0$  得  $g_t = -\hat{h}L_{\text{eff}}g - \hat{h}D\eta$ ；有效半群收缩，故

$$|g(t) - \hat{g}(t)|_2 \leq \hat{h}ID_{I_2} \int_0^t |g(s)|_2 ds。$$

这给出隐藏通道幅值与投影误差的定量接口；未另行控制  $\eta$  时，并不保证误差小。特别是  $\eta(0) = 0$  通常不保证  $\eta(t) = 0$ ，除非复制子空间对  $L_3$  不变或模型另加约束。此条件性结果没有解决第 12.2 节的物理消去问题。

## 7.2 三层正常数字洛书的等权平均判别

作者前期计算档案（见数据声明）中的  $L_{27}$  层叠模型使用 L、转  $90^\circ L$ 、转  $180^\circ L$  三个层。每层是正常洛书不意味着三维轴线全等和。其平均投影为  $(10J + \text{转 } 90^\circ L)/3$ ，是缩放平移后的幻方，但不是使用 1 至 9 的正常洛书。

本节仅研究每层使用 1 至 9 各一次、等权平均仍使用 1 至 9 各一次的条件；不声称完成所有三态晶胞、守恒式或投影的分类。

**命题 7 (正常数字平均的层相同性, T/E)。**三层各取正常洛书 8 种对称像之一时，等权平均仍为正常洛书，当且仅当三层完全相同。

**证明。**每层 Frobenius 范数平方 285。若平均也正常，其平方范数也为 285；严格凸性给

$$\frac{\|X_1\|_F^2 + \|X_2\|_F^2 + \|X_3\|_F^2}{3} - \left\| \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \right\|_F^2 = \frac{1}{9} \sum_{i < j} \|X_i - X_j\|_F^2. \quad (10)$$

左边为 0，故三层相等。充分性显然。完整枚举  $8^3 = 512$  种堆叠，恰 8 种满足正常投影。证毕。

**命题 8 (512 种正常层堆叠的线条件计数, E)。**对  $8^3 = 512$  种正常层堆叠，全部 27 条轴向线和为 15 者 0 种，全部 18 条面对角线和为 15 者 8 种，四条体对角线都和为 15 者 64 种，全 49 线同和者 0 种。这些计数各自独立，不表示互斥分类。逐一遍历三个层各 8 种选择，按 27/18/4 条线分别求和，并检验平均是否为正常洛书；完整枚举恰覆盖 512 个有序堆叠，正常平均为 8 种。程序同时登记几何线类及接受数量。

轴向等和条件不可能满足，可由简单奇偶论证证明：每层正常洛书的四角都为偶数，竖向角列的三项之和为偶数，故不可能等于层内幻和 15。另一方面，三层放同一 L 时，每条体对角线沿一条二维主对角线取数，所以四条体对角线均和为 15；竖向线的和却为  $3L_{ij}$ ，随位置变化。因此“每层 1 至 9 必然使体对角线失败”并不成立，正确结论是无法同时满足全部三维等和条件。改用三态坐标中点条件则是第 6.4 节的另一种有效接口。

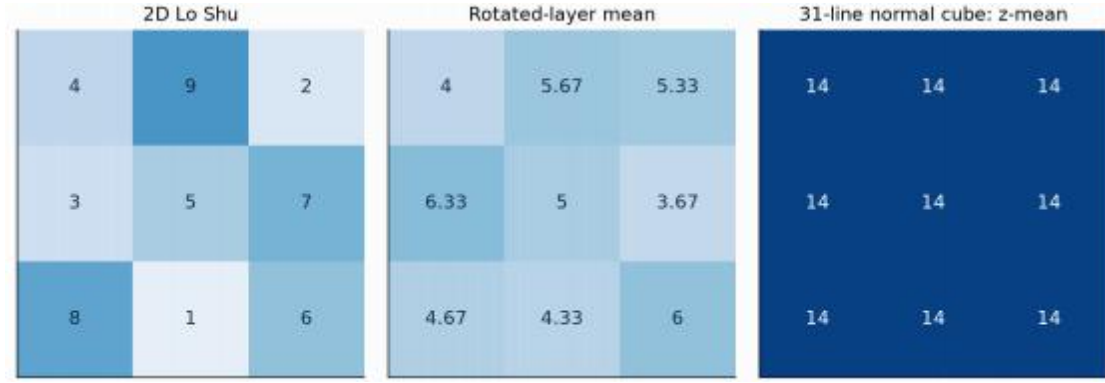


**图 2:** 指定三维标号模型的普通轴平均 (M/T)。正常层旋转堆叠得到缩放后的幻方，31 线正常幻立方得到常值 14；本图不展示第 7.1a 节的有限域商构造，也不表示三维结构自然选出洛书。

### 7.3 图拉普拉斯的精确压缩

以  $L_2$ 、 $L_3$  表示第 6.1 节共线图的无权组合拉普拉斯。令  $T$  把二维场复制到三层，即  $(Tg)(x, y, z) = g(x, y)$ ， $P = T^T/3$  为平均投影。

**定理 11 (Galerkin 接口,  $T/E$ ) 。**

$$T^T L_3 T = 5L_2, \quad U^T L_3 U = \frac{5}{3}L_2, \quad U = T/\sqrt{3}. \quad (11)$$

**证明。** 竖向边对复制场的差为 0。每条二维三点线产生三条固定高度的三维线及两条倾斜高度线；每条二维边恰有 5 条三维边投到它上面。故对任意  $g$ ，三维边差能量  $(Tg)^T L_3 (Tg) = 5g^T L_2 g$ ，对所有  $g$  成立即矩阵恒等式。U 的式子由归一化得到。证毕。

这是真正可交付给后续晶胞研究的算子接口，但不是自主动力学降维：一般  $PL_3$  不等于  $(5/3)L_2 P$ ，三维隐变量会反馈二维场。对本文精确矩阵，二者差的最大绝对项为  $32/9$ ，完整平方奇异值谱及范数见命题 6。只有另加层锁定、闭合假设或用受限变分模型，才能采用该二维有效演化。

### 7.4 图与内部代数的接口协议

三维共线图的度数必须按坐标类别核对：体心 1 点度 26，立方角 8 点度 14，面心 6 点度 10，棱心 12 点度 8。部分旧报告的度数多重集正确但空间类别名称错配，本稿以重新枚举的坐标为准。

几何节点空间  $\mathbb{R}^{27}$  与 27 维 Albert 代数具有相同维数，只说明可以选一个线性双射。Albert 乘法、自同构群或规范群不是由 27 这个数字推出的；其例外代数结构有独立文献 [9]；其中“magic square”是李代数构造，与数字洛书不是同一对象。若每个几何节点再承载 27 维内部空间，总空间是  $\mathbb{R}^{27} \otimes J$ ，维数 729，而不是 27。

比较不同研究中的“同一算子”须明确顶点排序和矩阵置换；同一核须在同一系数域、同一变量空间下比较行空间或提供显式同构。相同的谱隙、秩 23 或核维 4 本身不足以证明对象相同。

后续计算必须显式给出五项：顶点及顺序、边/超边及边界条件、权重与单位、内部空间与乘法/算子、投影及其闭合误差。本次数据包提供前述几何与投影矩阵，不继承未独立复验的粒子电荷、质量、真空选择或例外群涌现结论。关于几何邻接与 Jordan 乘法支撑的前期负结果档案见数据声明；本文仅主张需另行给出并验证乘法，不能由节点数或邻接直接推出。

## 8 动力学：什么能从静态洛书推出

### 8.1 静态等和不决定时间

**命题 9（动力学非唯一，T）。**在实状态空间中，给定所有时刻均满足  $A_2x = 0$ ，仍存在无限多种演化。

**证明。**由定理 2，令  $x(t) = M(a(t), b(t))$ ，任意可微  $a(t)$ 、 $b(t)$  都满足约束。取两参数不变、指数衰减或周期旋转，会给出静止、耗散或周期运动。静态条件没有选择其中任何一个。证毕。

因此，洛书不是仅由等和条件自动得到的唯一吸引子。离散九数字限制可以把可行集变成 8 个排列；在此有限集上，恒等更新、沿  $D_4$  旋转的周期更新及不同跃迁率的随机更新也都保持幻方约束。允许哪些跃迁、跃迁率和能量仍是额外模型输入。

### 8.2 约束松弛与局域输运

M 类约束松弛可定义  $E(x) = |A_2x|^2/2$  及  $x. = \frac{1}{2}A_2^TA_2x$ 。能量导数为  $\frac{1}{2}A_2^TA_2x \leq 0$ ；其平衡态是完整二维零和核而非单个洛书。由于八条线的长度与选取固定，这是一种超边约束动力学；它一般不保持全部顶点数值总和，不能直接宣称为无源图输运的局部流守恒。

对真正图输运，令  $B$  为带方向的顶点一边关联矩阵， $j$  为边流，连续性方程为  $P. = \frac{1}{2}Bj$ 。若  $j = \hat{h}B^TP$ ，则  $P. = \frac{1}{2}\hat{h}LP$ 。每列  $B$  两端符号相反使总量保持；当  $\hat{h} > 0$  时，有限连通图的无源稳态为常值，非恒定洛书一般不会是这种纯扩散的稳态。要维持图样，需外源、势、非线性作用或不同守恒变量。

上述模型的  $\hat{h}$  有时间尺度，不能从幻和 15 确定。图拉普拉斯谱提供衰减率接口；本次 L27 谱隙  $7\sqrt{6} \approx 4.550510$ 、重数 2，13 个不同本征值已复算。精确特征多项式为  $\lambda(\lambda - 9)^3(\lambda - 15)(\lambda - 27)(\lambda^2 - 14\lambda + 43)^2(\lambda^2 - 20\lambda + 97)(\lambda^2 - 24\lambda + 133)^3(\lambda^3 - 35\lambda^2 + 387\lambda - 1329)^3$ ；其整数展开与直接矩阵算法一致。谱可作为振动或扩散的模型输入，但本文没有将其匹配到未经定义的粒子频率。

零模也不自动等于吸引子。对无阻尼振动  $\ddot{q} = -c^2L_3q$  ( $c > 0$ )，能量  $(|q.|^2 + c^2q^TL_3q)/2$  守恒；非零模持续振荡，常值零模可作匀速运动。增加  $7q.$  ( $7 > 0$ ) 后，非零模衰减，但常值平衡仍是一整条直线；要唯一收敛到全零还需固定零均值及其速度约束，或加入钉扎。使用该算子研究动力学是合法模型选择，吸引子性质必须由具体方程、约束及初值证明。

## 9 指定散射权重模型 (M) 下的傅里叶读出

### 9.1 明确模型及解析强度

结构因子是晶体内容的加权相位和，定义及单位依赖散射通道 [10]。本文选择点位  $(i/3, j/3)$ 、散射权重  $x_{ij} = c + M_{ij}(a, b)$  的理想模型，不把整数直接认作某种原子的实验散射因子。

令  $(1) = \exp(\frac{2\pi i}{3})$ ，定义  $F(h, k) = \sum x_{ij}(1)^{hi+kj}$ ， $i, j$  从 0 到 2。行列等和给非零轴频率消光。直接代入通解得基本模 3 强度表：

$$I(h, k) = |F(h, k)|^2 = \begin{pmatrix} 81c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 27a^2 & 27(a+b)^2 \\ 0 & 27(a+b)^2 & 27a^2 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

标准洛书  $a = 1, b = 4, c = 5$ ，强度非零值为 2025、27、243，分别出现 1、2、2 次。Parseval 校验给强度总和  $2565 = 9 \times 285$ 。27 与 243 由参数化精确导出，不需要把 27、1、9 解释为额外量子规律。

整数倒易点的峰计数取决于展示窗口。例如  $h, k$  均取  $-8$  至 8 的  $17 \times 17$  整数窗口， $h, k$  都非 3 倍数的弱峰有  $12^2 = 144$  个，只是模 3 重复计数；同样大小但取 0 至 16 的窗口则为  $11^2 = 121$

个，不是晶胞固有的“144 个态”。单胞权重改变可激活均匀参考的消光点，但这不证明存在新粒子或新的普适量子化。

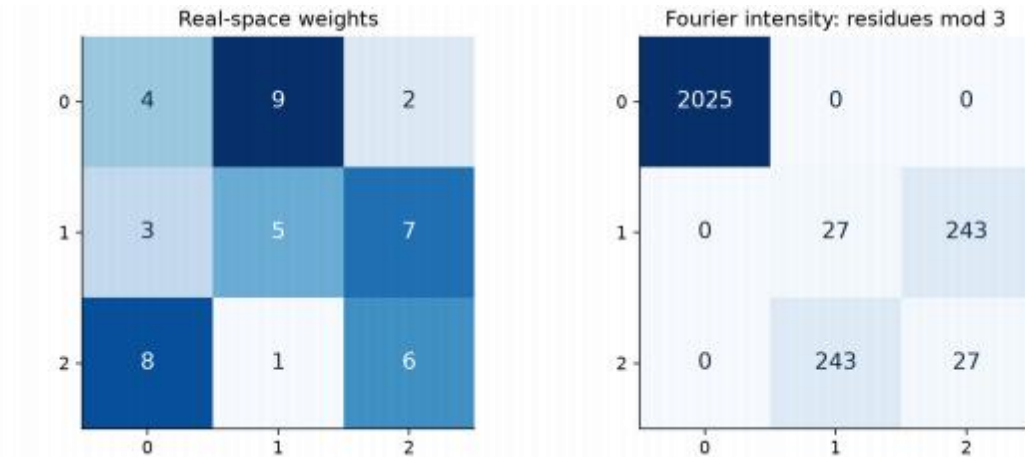


**图 3:** 给定标准洛书、指定线性散射权重 (M) 下的离散傅里叶强度 (T/E)。频率按模 3 重复，振幅以复数运算；强度转置对称也见于非幻方半幻方对照，图中未使用实验散射数据。

## 9.2 哪些信号是洛书专属

**命题 10 (转置强度对称的范围, T)。** 任意实  $3 \times 3$  矩阵，只要每行、每列具有同一和，就在整数模 3 倒易点满足  $I(h, k) = I(k, h)$ ，不需要两条主对角线等和。

**证明。** 除原点外的轴频率振幅全部为 0；原点在转置下固定。其余频率为 (1, 1)、(1, 2)、(2, 1)、(2, 2)。转置固定前后对角角位置，只交换 (1, 2) 和 (2, 1)，它们互为负频率；实权重的傅里叶共轭关系保证强度相等。证毕。

因此随机一般权重阵不是充分的对照，应加入同边际和但非幻方的半幻方对照。本次使用同样由 1 至 9 构成的  $\begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 \\ 4 & 9 & 2 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ ，它的行列和均为 15、两条主对角线和分别为 18 和 24，却仍满足该衍射对称。非整数频率不遵循模 3 简化，离散频点之间的不对称应称有限基元形状因子的连续延拓；要称真实漫散射，还需无序、热振动、有限尺寸等物理来源。

## 9.3 三维投影—傅里叶截面定理

对三维权重  $f$  定义  $F_3(h, k, l) = \sum f_{ijk} \exp[2\pi i(hi + kj + lk)/3]$ ，则

$$F_3(h, k, 0) = F_2 \left[ \sum_z f \right] (h, k). \quad (13)$$

这是交换有限求和得到的精确投影接口。对索引  $\approx_0 = 0, 1, 2$  的切片， $F_2[f(:, :, \approx_0)](h, k) = (1/3) \sum_l \exp(2\pi i l \approx_0 / 3) F_3(h, k, l)$ ，其中  $l = 0$  至 2；若使用中心化索引，需相应平移相位。切片不能与  $l = 0$  傅里叶截面混用。也不能根据各层强度转置对称就推出三维所有  $l$  截面同样对称，因为层间交叉相位依赖振幅。后续任何三维显影结论都应从完整复振幅计算。

## 10 指定弹簧模型 (M) 下的振动接口

本节保留直接说明算子与力学能量关系的振动模型。紧束缚谱配对属于反演奇势和二分图跳跃的一般结果，移至附录 A，作为模型条件与非专属性的对照。

## 10.1 声学简并与弹性稳定性

本节两种模型均采用无限周期方格的四个最近邻键，每个无向键计一次，微格距为 1， $\hbar > 0$ ， $m_i > 0$ ；它们不使用第 6 节的 24 边共线图，也不使用商投影后的加权完全图。

若位移  $u_i$  为二维向量，选择各向同性矢量弹簧能量  $\hbar \sum |u_i - u_j|^2/2$ ，每条边对两个极化分量使用同一标量图算子，则动力学矩阵是标量质量加权拉普拉斯与  $I_2$  的张量积。每个标量模被精确复制两次（还可能出现额外偶然简并），这一成对复制由模型直接保证，无需寻找洛书隐藏点群。 $\Gamma$  点有两个平移零模。这种矢量差耦合还会惩罚刚体转动：对一条沿  $x$  的单位键，微小转角  $\theta$  给位移差  $\theta e_y$ ，能量为  $\hbar \theta^2/2$ ，而无预应力中心力弹簧的二次伸长能为 0。因此第一种模型是指定的位移耦合模型，不能直接等同于自由、无预应力材料的中心力弹性。

若改为真正最近邻中心力能量  $\hbar \sum [(u_i - u_j) \cdot e_{ij}]^2/2$ ，方格横纵键只约束各自方向； $3 \times 3$  超胞  $\Gamma$  点存在六个零模，含额外柔性滑移。两种模型不同，不能同时以“标量弹簧”名称混用。稳定剪切响应需要对角键、角力或其他弹性项，新增刚度必须显式记录。

在第一种矢量弹簧模型中，长波有效质量为单胞平均质量。若  $m_i = u_i m_0$ 、 $\hbar$  均匀，单位微格距下声速平方为  $\hbar/(\text{平均 } u \cdot m_0)$ ；平均  $u = 5$  给  $U^2 = \hbar/(5m_0)$ 。这个结果对同平均质量的其他排列也成立，不是洛书排列独有。它可以作为均匀化接口，但不能把中心数 5 与声速的出现解释为新的基本常数。

## 11 原稿修订与既有研究接口审计

前期论证 [12] 中保留的内容是通解、指定正常化条件下的整数最小阶及洛书 8 解。若原题“必然性”仅指这些明确条件下的分类，本文定理 1—4 已证明；若指从一般局域流守恒或五个单态直接推出唯一洛书，则原推理链未获证明，且其中单态充分性已有反例。修订如下：

1. 自由群改为严格定义：四符号若满足  $e_- = -e_+$ 、 $U_- = -U_+$ ，对应的是  $\mathbb{Z}^4$  的商群  $\mathbb{Z}^2$ ，有限字母表  $\{0, \pm e, \pm U\}$  不是加法封闭的群。
2. 撤回“五个单一状态充分生成九个互异读数”。固定单值映射加统一平移后仍至多五种值；旧稿  $u = 1$  时甚至只剩三种。允许线性组合将改变原单占位假设，必须另建模型。
3. 撤回选择性带权投影保持零和的陈述。旧  $W$  只改变  $b$ 、 $-b$  两个格，其首、末行和为  $\pm b(u-1)$ 。旧附录仅筛范围及互异，会在  $u = 4$  输出四个非幻方；修订不能只更改输出结论而不更改规则。
4. 中心 5 与幻和 15 改由定理 1 和总和推导。平移到  $[0, 8]$ 、 $[2, 10]$  的幻和改为 12、18。
5. “局域守恒”改为指定直线等和；图输运、中点差分与拉普拉斯分别定义，不再称普通 8 邻接行线为 3 团。
6.  $D_4$  轨道与单个标号点群分开；晶胞角、面心、棱心的度数名称按坐标重核。
7. 整数衍射对称从“洛书独有”改为三阶实半幻方条件的结果；强度 27、243 给出解析推导。
8. 带隙声明明确直接/间接、采样域、填充与模型输入；声学简并解释为所选极化模型的张量复制结果。

作者提供的同题统一框架研究稿（公开路线记录见 [13]）还涉及 Albert 代数、规范群、味参数拟合、真空作用量与多晶胞演化。本稿仅交付可独立核查的几何及算子接口，不将该框架的其他结论视为本论文已经证明。已有两参数味拟合不纳入本次无拟合证据链。

本文所谓“无拟合”是未以观测数据反求参数；它不等于无假设、无模型选择、无有量纲参数或无针对目标的构造。特别是第 7.1a 节使用已知洛书设计相容读出，不能作为独立物理预测的证据。所有人为字典、邻接、投影与强度比均应可见。

## 12 结论与可检验研究出口

本研究把洛书联系到传统象数与现代离散模型时，得到的是若干明确接口及明确障碍。在指定整数、零和、互异与最小化条件下，完整参数化、最小三态原型与正常化分类成立；给定标准洛书及配套读出，可构造 27 状态到 9 宫的模 3 商压缩复现，投影本身不自动选出洛书；给定传统字典与编码、同步更新规则，可计算八卦配对与干支周期；全线三维标号、普通轴投影及立方八顶点的直接投影存在所证障碍。共线图的压缩恒等式、有限傅里叶投影关系和指定振动模型，为后续晶胞研究提供可复算的数学对象。

主定理 9 把约束空间集中登记；命题 2、8 给出 432 个仿射读出及 512 种正常层堆叠的有限分类；命题 6 将投影不闭合从元素反例升级为精确缺陷谱和条件性误差界。这些接口允许后续工作明确选择算子模型并设计对照，而无需声称数字标号由一般流守恒唯一生成。

尚未得到的结论同样明确：洛书不凭静态等和唯一决定干支的物理动力学；二维洛书不唯一重建三维晶胞；27 维数相同不生成例外代数乘法；数值显影也不直接证明基本物理理论。后续若提出模型，应在计算前固定字典、邻接、读出、对照与反例标准。

### 12.1 O1: 不输入目标洛书的选择原则

需要事先公开候选投影与读出族、目标泛函、对称等价和无解或多解标准，不以与已知  $L$  的差作为优化目标。§2.5 已经在给定双三态八线零和、整数互异与最小范围条件下选择正常洛书轨道，但尚未从独立物理原则选定这些条件，也未选出唯一  $\pi$  与  $N$ 。只有先说明选择规则的独立来源，再证明其最优解及稳健性，才能讨论超出目标复现的预测。

### 12.2 O2: 隐藏通道何时可以受控忽略

18 维投影核只表示不可见，不表示自动处于高能、快速衰减或与可见变量解耦。需要给出完整动力学、初始条件、可见—隐藏耦合、谱隙或时间尺度，并证明在指定时间区间内二维近似的误差上界。若引入层锁定能、额外耗散或时间尺度分离，必须说明其物理来源和参数；单独的 Galerkin 恒等式不足以提供这种误差控制。

### 12.3 O3: 传统拓扑与物理作用量的连接

需要先固定采用哪套五行、干支配置，再定义状态量、单位、时间、相互作用及驱动或耗散，验证守恒量、稳定性与可观测后果。有向关系不直接等于平衡势；含不可逆作用时还须交代能量收支。§5.3 仅给出稳定循环混合的抽象例子，没有赋予其唯一物理解释。现稿未给出同时满足这些要求、且由洛书独立导出的作用量。

上述三个问题均保留  $O$  状态。继续计算应使用同边际和、同反演奇性、同平均质量等非洛书对照，检验幻方条件究竟新增了什么约束；通过模型内稳定性或对称性检查不自动建立传统对应的自然因果。

## 数据与材料可用性

全部有限几何对象（二维 8 线与 24 边、三维 49 线与 147 边）、求和与中点矩阵、关联与拉普拉斯矩阵、两种投影及闭合缺陷矩阵，以可复算程序、JSON 和 NPZ 随稿提供。程序的有限枚举范围、顶点顺序与系数域已公开；不使用观测数据或回归拟合。整数枚举与精确消元提供有限计算证据，浮点谱及动量采样不替代连续域证明。

前期层叠显影、图结构审计及负结果记录属于作者提供的内部计算档案，不作为外部验证来源，不列入参考文献；本文相关定义与数值按正文及附件重新计算。公开文献 [13] 的版本为 AiXiv v1.0；本次用于核查具体几何定义的作者提供研究稿标为 v1.5，不假定两个版本逐字相同。前期内部原始文档不随包公开；相关结论须由本文给出的定义和证据独立支撑。

复算程序覆盖  $9!$  个正常数字排列、 $8^3$  种有序正常层堆叠、432 个仿射双射，及指定矩阵的有理数/模 3 秩、压缩恒等式和精确特征多项式。全文核查与有限程序验证不构成绝对无误或外部同行评审保证。

## 致谢

作者感谢 ChatGPT 在文献检索、推导与计算核查、程序编写及文稿修订中的辅助，并感谢 Kimi 辅助形成的、由作者提供的红队复核意见。研究方向由作者提出；本文吸收复核建议并对相关结论重新计算。AI 工具不列为本文作者，作者对全部内容承担学术责任。

**Acknowledgments.** The author acknowledges assistance from ChatGPT with literature retrieval, mathematical and computational checks, programming, and revision, and the Kimi-assisted review comments supplied by the author. The research direction was proposed by the author, who assumes responsibility for all content. AI tools are not listed as authors.

## A 指定紧束缚模型的谱配对与带隙边界

### A.1 反演奇势与谱配对

选无限方格的实最近邻紧束缚模型  $H = -tA + \Delta \text{diag}(U)$ ， $t, \Delta$  为实数。以单胞中心为坐标原点，基元坐标  $r = (i-1, j-1)$ ， $i, j = 0, 1, 2$ ，令  $U(r) = L_{ij} - 5$  并按周期 3 延拓。中心互补使  $U(-r) = -U(r)$ ；若坐标仍用  $i, j = 0$  至 2，反演应写成  $r \mapsto (2, 2) - r$ 。反演  $P$  将势变号、保持跳跃；子格符号  $S\psi(r) = (-1)^{r_\infty + r_y} \psi(r)$  将最近邻跳跃变号、保持在位势。因此  $SP$  与  $H$  反对易，并在 Bloch 空间连接不同动量。

以微格距为 1， $3 \times 3$  周期的倒格矢为  $2\pi/3$ ，动量位移  $Q = (\pi/3, \pi/3)$ 。于是

$$E_n(k) = -E_{10-n}(Q - k). \quad (14)$$

特别是  $\Gamma$  与超胞角点  $Q$  的谱互为相反倒序。当  $t$  非零时此关系对任意  $\Delta/t$  成立， $t = 0$  也直接满足谱配对，但要求最近邻二分图跳跃及反演奇势；它并非洛书独有，其他反演奇周期势也满足。引入同子格跃迁或破坏反演奇势可使关系失效。

本次独立构造  $9 \times 9$  Bloch 矩阵；零势折叠极限误差约  $2.9 \times 10^{-15}$ ，谱配对误差约  $5.3 \times 10^{-15}$ 。这些是所选模型的实现核查，不是实验误差。红队另用所有键均带动量相位的等价 Bloch 规范独立重建，验证同一配对，并以非幻方的反演奇势作对照。

**推论 1（零能带隙的限制，T/E）。** 当  $2k = Q$  模倒格矢时，九维 Bloch 谱与自身相反倒序，故  $E_5(k) = -E_5(k) = 0$ 。在基本布里渊区内这给出四点  $k = (\pm\pi/6, \pm\pi/6)$ ，对任意实  $t, \Delta$  均成立。因此这个模型不存在包含零能的完整谱隙。该结论不否定其他整数填充处的带隙，也不要求零点都是能带交叉；它限制的是零能附近的绝缘解释。20 组不同动量及参数复核与推导一致。

### A.2 带隙、填充与无拟合纪律

必须区分最小直接间隔  $\min_k (E_{r+1}(k) - E_r(k))$  与间接隙  $\min_k E_{r+1}(k) - \max_k E_r(k)$ 。同动量不简并不足以证明绝缘体，后者还需要给定填充、正的全局间接隙以及相应近似条件。

在明确选择  $\Delta/t = 1$  时， $61 \times 61$  网格对第 4—5 带给直接间隔约 0.477627、间接隙约 0.369343，单位为  $t$ 。它们是网格证据，不作为连续布里渊区精确全局极值或实验材料断言。 $\Delta/t$  是无量纲模型输入，即使固定为 1 也不是“由单位制消掉的自由度”。

还可给出纯解析的存在性结果： $H_0$  的范数至多  $4|t|$ ，正常洛书在位势的相邻值间距为  $|\Delta|$ 。Weyl 界保证当  $|\Delta| > 8|t|$  时，九个有序谱带分别落入互不相交的在位能量  $\pm 4|t|$  区间，邻带全局隙至少  $|\Delta| - 8|t|$ 。这证明高对比模型具有带隙，但不是洛书从自然界无参数选出的幅值。

## 参考文献

- [1] G. Xin. Constructing All Magic Squares of Order Three. arXiv:math/0409468, 2004. [arXiv record](#)
- [2] M. Beck and T. Zaslavsky. Six Little Squares and How Their Numbers Grow. Journal of Integer Sequences 13 (2010), Article 10.3.8. [Full text](#)
- [3] M. M. Ahmed. Algebraic Combinatorics of Magic Squares. arXiv:math/0405476, 2004. [arXiv record](#)
- [4] M. Beck, M. Cohen, J. Cuomo, and P. Gribelyuk. The Number of “Magic” Squares and Hypercubes. arXiv:math/0201013, 2002. [arXiv record](#)
- [5] 《周易正义·说卦》，卷九之三、卷九之五。维基文库转录。[Wikisource: 09.03](#)；[Wikisource: 09.05](#)
- [6] 《周易·系辞上》第十一章；胡方平，《易学启蒙通释》卷上（四库全书本）。维基文库转录。[Wikisource: Xici I](#)；[Wikisource: vol. 1](#)
- [7] Hong Kong Observatory. Heavenly Stems and Earthly Branches. [Hong Kong Observatory](#)
- [8] 萧吉，《五行大义》卷二。维基文库转录。[Wikisource: vol. 2](#)
- [9] J. C. Baez. The Octonions. Bulletin of the American Mathematical Society 39 (2002), 145–205. [Author text](#)
- [10] International Union of Crystallography. Structure Factor. Online Dictionary of Crystallography; The Reciprocal Lattice. IUCr educational pamphlet. [IUCr dictionary](#)；[IUCr pamphlet](#)
- [11] H. Wondratschek. Crystallographic Symmetry Operations, §8.1.5. International Tables for Crystallography, Vol. A, edited by Th. Hahn, 2006, pp. 723–724. [IUCr online](#)
- [12] 王建明（人类作者；AI 协作：KIMI、Deepseek、DouBao、Qwen）。离散局域守恒条件下的唯一最小结构： $3 \times 3$  幻方的必然性. AiXiv, aixiv.260702.000001, v1.1, 2026. [AiXiv record](#)
- [13] 王建明（人类作者；AI 协作：KIMI、Deepseek、DouBao）。洛书晶胞统一框架：从 27 节点离散结构到标准模型与幻线几何相. AiXiv, aixiv.260830.000007, v1.0, 2026. [AiXiv record](#)

在线来源查阅：2026 年 10 月。