

三维最小三值零和结构： $3 \times 3 \times 3$ 皇后线几何的存在唯一性

王建明

独立研究者
洛书晶胞研究计划

2026 年 10 月 7 日

摘要

本文研究 $\{0, 1, 2\}^3$ 上经典 $3 \times 3 \times 3$ 皇后线几何的零和显示问题。该结构含 27 个点、49 条线：27 条轴平行线、18 条面对角线、4 条体对角线。我们以修正后的组合公理系统刻画该结构，并证明：

- (1) 值代数被特征 3 强制为 $\mathbb{F}_3$ ，且 $\mathbb{F}_3$ 是唯一最小三元字母表；
- (2) 结构定理：在 49 条皇后线上零和的函数恰为仿射函数，解空间维数 4，共 81 个显示；
- (3) 对偶定理：13 个线方向与 13 个非常数显示的射影类以退化关联构成射影平面 $\text{PG}(2, 3)$ ；
- (4) 坐标重建定理：满足修正公理的结构同构于经典皇后线几何，且在立方体全对称群（阶 48）意义下唯一。

本文修正了先前版本中关于体对角线共点性、度序列、自同构群及公理强度的错误，并删除了与经典结构矛盾的“非中心等价类相交”与“中心等价类”条件。

版本链：v1→RR→v1.1→v1.2→ 汇编 → 对账 →v3→ 红队 11→v4→ 红队 12→v5→**v5.3**
(终稿)

目录

1	引言	2
2	目标结构	2
3	修正公理	2
4	值代数：特征 3	3
5	显示定理	3
6	对偶定理：PG(2, 3)	4
7	坐标重建	5
8	主定理	6
9	与先行工作的关系	7
	参考文献	7
	附录 A 显示类与常值线计数表	7
	致谢	8

1 引言

零和构形与 cap-set 问题在有限域上互为对偶。经典 $3 \times 3 \times 3$ 皇后线几何是三维立方体上沿轴、面对角、体对角方向的三点线集合。其三阶完美幻立方在整数层面不存在，但在 $\mathbb{F}_3$ 零和层面存在丰富的仿射显示。本文在结构层面给出严格的存在唯一性定理。

2 目标结构

令

$$P = \mathbb{F}_3^3 = \{0, 1, 2\}^3.$$

经典皇后线集 $\mathcal{L}_Q$ 包含：

- **轴平行线**：固定两个坐标，第三个坐标变化。共 $3 \cdot 3^2 = 27$ 条。
- **面对角线**：在每个坐标平面内，经过该平面中心的两条对角线。共 $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ 条。
- **体对角线**：连接立方体相对顶点的 4 条线，全部经过全局中心 $(1, 1, 1)$ 。

总数

$$27 + 18 + 4 = 49.$$

经典皇后线几何的度序列为

$$13^{\times 1}, \quad 7^{\times 8}, \quad 5^{\times 6}, \quad 4^{\times 12},$$

度和为 147。其自同构群为立方体全对称群

$$S_3 \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3,$$

阶为 $6 \cdot 8 = 48$ 。

3 修正公理

定义 3.1 (三维完整显示的公理). 三维完整显示是二元组 $(P, \mathcal{L})$ ，其中 P 为 27 点集， $\mathcal{L}$ 为三元子集（线）族，满足：

(S1) **线性**：任两点至多共一线； $|\mathcal{L}| = 49$ 。

(S2) **网**： $\mathcal{L}$ 含三个两两不交的子类 A_1, A_2, A_3 ，各为 P 的 9 个三元组划分（平行类），其诱导的等价关系两两交换。

- (S3) **面对角线**: 网决定的每个 9 点“平面”(横截于某网类的截面) 恰含 2 条进一步的线, 且二者交于平面中心。
- (S4) **体对角线**: 网线与面对角线之外恰余 4 条线。这 4 条线都经过同一点 O , 且 O 同时是横截于 A_1 的某个 9 点平面的中心、横截于 A_2 的某个 9 点平面的中心、横截于 A_3 的某个 9 点平面的中心。
- (S5) **各向同性**: 存在 3 阶自同构循环置换 $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3$ 。
- (S6) **显示**: 存在非常数映射 $f: P \rightarrow \mathbb{F}_3$ 在每条线上零和。

注 3.1. 原 v4 公理仅要求“剩余 4 条线”, 不足以唯一确定经典结构。修正后的 (S4) 通过“4 条剩余线共点于 O , 且 O 同时是三个网各一个平面的中心”纯组合地强制剩余 4 条线为经典体对角线。特别地, 删除了先前版本中与经典结构矛盾的“与每个非中心等价类恰交于一点”以及“中心等价类”条件。

4 值代数: 特征 3

定理 4.1 (特征 3 刻画). 设 R 为含么环。以下等价:

- (i) 每个三项等差数列 $(a, a+d, a+2d) \subseteq R$ 之和为零;
- (ii) $\text{char}(R) = 3$ 。

证明. 条件 (i) 即 $3(a+d) = 0$ 对一切 $a, d \in R$ 成立。取 $d = 0, a = 1$ 得 $3 \cdot 1 = 0$, 即 (ii)。反之, $\text{char}(R) = 3$ 时 $3x = 0$ 恒成立。□

推论 4.1 ($\mathbb{F}_3$ 的最小唯一性). 若 $|R| = 3$ 且 R 承载显示, 则 $R \cong \mathbb{F}_3$, 唯一。

证明. 素数阶含么环必为域: 加法群为素数阶循环群, 分配律强制 $x \cdot y \equiv yx \pmod{p}$, 即唯一的域乘法。故唯一承载显示的三元环是 $\mathbb{F}_3$ 。□

5 显示定理

定理 5.1 (结构定理). 设 $f: \mathbb{F}_3^3 \rightarrow \mathbb{F}_3$ 。以下等价:

- (i) f 在每条皇后线 (49 条) 上零和;
- (ii) f 在每条轴平行线与每条面对角线 (45 条) 上零和;
- (iii) f 为仿射函数, 即

$$f(x, y, z) = c + ax + by + dz.$$

解空间维数为 4, 共 $3^4 = 81$ 个显示, 其中 3 个为常数。

证明. 轴向消去平方项. 固定坐标 i , 冻结其余坐标, 得一元函数

$$g(t) = f(\dots, t, \dots) = at^2 + bt + c.$$

轴平行线条件给出 $g(0) + g(1) + g(2) = 0$. 在 $\mathbb{F}_3$ 中,

$$g(0) + g(1) + g(2) = c + (a + b + c) + (a + 2b + c) = 2a + 3b + 3c = 2a.$$

故 $a = 0$. 因此 f 的多项式表示中不含任何 x_i^2 项. 于是

$$f(x, y, z) = c + ax + by + dz + pxy + qxz + ryz + sxyz.$$

面对角消去交叉项. 考虑 $z = 0$ 面上的对角线

$$(0, 0, 0), (1, 1, 0), (2, 2, 0).$$

代入得

$$f(0, 0, 0) = c, \quad f(1, 1, 0) = c + a + b + p, \quad f(2, 2, 0) = c + 2a + 2b + p.$$

三者和为 $3c + 3a + 3b + 2p = 2p$. 零和迫使 $p = 0$. 同理, 用 $y = 0$ 面和 $x = 0$ 面的对角线得 $q = 0, r = 0$. 再用 $z = 1$ 面上的对角线 $(0, 0, 1), (1, 1, 1), (2, 2, 1)$ 得 $2s = 0$, 故 $s = 0$.

于是 $f(x, y, z) = c + ax + by + dz$, 即 f 为仿射函数.

反之, 若 $f(p) = c + \alpha^\top p$, 则在任意三点等差线 $\{p, p + v, p + 2v\}$ 上,

$$f(p) + f(p + v) + f(p + 2v) = 3c + \alpha^\top(3p + 3v) = 0.$$

所以显示恰为仿射函数. □

推论 5.1 (独立方向). 仅 3 个轴向与 3 个同号面对角方向 (6 方向、36 条线) 已强制仿射性; 异号面对角线与全部体对角线冗余.

推论 5.2 (失败必成平行类). 若 f 非仿射, 则其零和失败以整个轴向或面对角平行类的形式出现, 绝不只坏在孤立线上.

6 对偶定理: $\text{PG}(2, 3)$

定理 6.1. 13 个方向 D 与 13 个非常数显示的射影类 P (系数 $\alpha \in \mathbb{F}_3^3 \setminus \{0\}$ 模标量) 以退化关联

$$[v] \text{ 与 } [\alpha] \text{ 退化} \iff \alpha^\top v = 0$$

构成射影平面 $\text{PG}(2, 3)$: 每个方向恰关联 4 个显示类, 每个显示类恰在 4 个方向退化, 任两方向恰共一个退化显示, 任两显示恰共一个退化方向。

证明. 方向是 $\mathbb{F}_3^3$ 的一维子空间, 共 $(3^3 - 1)/(3 - 1) = 13$ 个; 显示类 (α 的射影类) 也是 $\mathbb{F}_3^3$ 的一维子空间, 同样共 13 个。 $\alpha^\top v = 0$ 是点—线关联: 固定 $[\alpha]$, 满足 $\alpha^\top v = 0$ 的 $[v]$ 构成一个二维子空间, 即 $\text{PG}(2, 3)$ 的一条线, 含 $q + 1 = 4$ 个点。 $q = 3$ 时标准计数成立: $q^2 + q + 1 = 13$ 点 13 线, 每线 4 点, 每点 4 线, 连接与交唯一。□

推论 6.1 (按显示类型的常值线计数). 不存在在所有皇后线上都取三互异值的彩虹显示。每个非常数显示在其 4 个退化方向的全部皇后线上常值。常值皇后线数为:

- 轴向型显示类: $2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 = 24$ 条;
- 面对角型显示类: $9 + 3 + 2 \cdot 1 = 14$ 条;
- 体对角型显示类: $3 \cdot 3 + 1 = 10$ 条。

证明. 经典皇后线几何中, 轴向方向贡献 9 条平行线, 面对角方向 3 条, 体对角方向 1 条。按退化方向类型计数即得。□

注 6.1. 3 个常数显示不属于任何射影类; 它们是唯一 “在所有 49 条线上零和但处处非彩虹” 的显示。

7 坐标重建

定理 7.1. 任一满足 (S1)–(S6) 的结构同构于 $\{0, 1, 2\}^3$ 上的皇后线几何; 同构在立方体全对称群 (阶 48) 意义下唯一。

证明. 证明分五步。

第 1 步: 网到乘积坐标。由 (S2), 三个网 A_1, A_2, A_3 两两不交, 各是 P 的 9 个三元组划分, 诱导三个等价关系 E_1, E_2, E_3 , 两两交换。由 (S1) 与 (S2) 中三网两两不交, 任两点不可能同时属于三个网的同一条线; 若它们属于三个网的不同线, 则共两条以上线, 违反 (S1)。故

$$E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \text{恒等关系}.$$

由可交换等价关系的标准乘积定理,

$$P \cong X \times Y \times Z, \quad |X| = |Y| = |Z| = 3.$$

不妨令 $P = \mathbb{F}_3^3$ 。三个网分别是沿三个坐标轴的平行线。于是 27 条轴平行线被唯一确定。

第 2 步: 面对角线被唯一确定。考虑任意坐标平面, 例如固定 $x = a$, 得到 $\{a\} \times \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$ 。它包含来自另外两个网的线, 形成 3×3 网格。由 (S3), 该平面恰含

两条进一步的线，且二者交于平面中心。在 3×3 网格中，经过中心且不属于网线的三点线只有两条对角线。因此这两条线被唯一确定为该平面的两条面对角线。对所有 9 个坐标平面重复，得到 18 条面对角线，正是经典面对角线。

第 3 步：剩余 4 条线必为体对角线。已确定 $27 + 18 = 45$ 条线。由 (S4)，剩余恰 4 条线，且都经过同一点 O ， O 同时是横截于 A_1, A_2, A_3 各一个平面的中心。在乘积坐标下，横截于 A_1 的平面为 $x = a$ ，其中心为 $(a, 1, 1)$ ；横截于 A_2 的平面为 $y = b$ ，其中心为 $(1, b, 1)$ ；横截于 A_3 的平面为 $z = c$ ，其中心为 $(1, 1, c)$ 。这三个集合的交集唯一确定为 $O = (1, 1, 1)$ 。

过 O 的 13 条线中，3 条轴平行线已包含在 27 条轴平行线中，6 条面对角线已包含在 18 条面对角线中，剩下 4 条只能是四个体对角方向

$$(1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)$$

模整体符号。每个方向过 O 只有一条完整线，所以剩余 4 条线必然是这 4 条体对角线。因此 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_Q$ 。

第 4 步：自同构群。自同构必须保持三个网的集合 $\{A_1, A_2, A_3\}$ ，所以在乘积坐标下由坐标置换和每个坐标上的双射组成。面对角线是每个坐标平面内经过平面中心的两条对角线。要保持面对角线，每个坐标上的双射必须把该坐标的中心元素映到中心元素。在 3 元集中，保持中心元素的置换只有恒等和交换两个非中心元素，共 2 种。因此每个坐标有 2 种选择，三个坐标共 $2^3 = 8$ 种；再乘以坐标置换 $3! = 6$ ，总数为

$$6 \cdot 8 = 48.$$

所以自同构群为 $S_3 \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ，阶 48。

第 5 步：合拢。步骤 1-4 将全部自由度压进经典皇后线几何，唯一性成立。 $\square$

注 7.1. 本证明未使用 (S6)：坐标重建是纯组合的。皇后几何上的显示理论是自动的 (定理 5.1)；(S6) 把零和要求纳入定义而非唯一性论证。

8 主定理

定理 8.1 (主定理). 三维完整显示存在于 $|P| = 27$ ；每个这样的结构同构于 $\{0, 1, 2\}^3$ 上的皇后线几何 (27 轴、18 面对角、4 体对角共 49 条)，在立方体全对称群 (阶 48) 意义下唯一。值代数被强制为 $\mathbb{F}_3$ ；显示恰为仿射函数 (4 维解空间，81 个显示)；13 个方向与 13 个非常数显示的射影类以退化关联构成 $\text{PG}(2, 3)$ ；13 方向中仅 6 个承载独立约束。

证明. 存在性由经典皇后线几何给出。由 (S2)，三个网各为 9 个三元组划分，立即得 $|P| = 27$ 。唯一性由定理 7.1。值代数由定理 4.1 和推论 4.1。显示定理由定理 5.1。对偶定理由定理 6.1。独立方向由推论 5.1。 $\square$

9 与先行工作的关系

配套短文公理化整数层：它重新推导三阶幻方的已知唯一性，并将三维推广登记为启发性。本文在结构 ($\mathbb{F}_3$) 层工作，以修正后的组合公理证明真正的存在唯一性定理。

参考文献

- [1] J. E. Olson, A combinatorial problem on finite abelian groups, I, *J. Number Theory* 1 (1969), 8–10.
- [2] P. Erdős, A. Ginzburg, A. Ziv, Theorem in the additive number theory, *Bull. Res. Council Israel* 10F (1961), 41–43.
- [3] C. Chevalley, Démonstration d’une hypothèse de M. Artin, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.* 11 (1935), 73–75.
- [4] J. S. Ellenberg, D. Gijswijt, On large subsets of $\mathbb{F}_q^n$ with no three-term arithmetic progression, *Ann. of Math.* 185 (2017), 339–343.
- [5] The Hesse configuration, arXiv:1107.4387.
- [6] W. Trump, The successful search for the smallest perfect magic cube, trump.de/magic-squares.
- [7] B. Alspach, K. Heinrich, Perfect magic cubes of order $4m$, *Fibonacci Quart.* 19 (1981), 97–106.
- [8] 王建明, 离散局域零和条件下的唯一最小结构：三阶幻方的必然性, AiXiv:260702.000001 (2026).
- [9] 王建明, 有限域上多胞耦合系统的耦合周期公式, AiXiv:260930.000001 (2026).

附录 A 显示类与常值线计数表

13 个方向 (模 $\pm$) 分类如下：

类型	代表方向	个数	每条方向皇后线数
轴向	(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)	3	9
面对角	(1, 1, 0), (1, -1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 1, 1), (0, 1, -1)	6	3
体对角	(1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)	4	1

对应的显示类常值线数：

- 轴向型显示类：退化方向含 2 轴向 + 2 面对角，常值线数 $2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 = 24$ 。
- 面对角型显示类：退化方向含 1 轴向 + 1 面对角 + 2 体对角，常值线数 $9 + 3 + 2 \cdot 1 = 14$ 。
- 体对角型显示类：退化方向含 3 面对角 + 1 体对角，常值线数 $3 \cdot 3 + 1 = 10$ 。

致谢

研究方向与全部科学判断由作者独立提出与作出。大规模符号验证、完备枚举、证明义务的独立红队审读与文本起草由 AI 助手执行，其贡献按 arXiv 政策在此确认并致谢，不列为作者。中间报告的完整版本链可向作者索取。

本预印本尚未经同行评审。