

GF(3)⁴ 上 C_5 的作用、四维单纯形与二维 D_4 骨架的分离 ——一个受洛书启发的有限代数结构

王建明

2026 年 9 月 30 日

定位：本文不含任何物理结论。所有“物理动机”仅出现在本引言。

摘要

本文研究 GF(3) 上一个 4×4 矩阵 E ($E^5 = I$, $\text{ord}(E) = 5$, 最小多项式为 5 次分圆多项式 Φ_5) 所生成的 C_5 作用。我们证明：

1. **唯一性** (§2)： C_5 在 GF(3) 上恰有一个 4 维不可约表示， E 在 $GL(4, 3)$ 中构成唯一的 5 阶共轭类 (303264 个元素)；
2. **单纯形结构定理** (§3)： C_5 在 $GF(3)^4$ 上的 16 条 5 周期轨道，每一条的 5 个点都构成 4 维单纯形基——这不是穷举巧合，而是“ Φ_5 不可约 $\implies$ 任意非零向量是循环向量”的直接推论；
3. **分类定理** (§4)： 27 个三维嵌入点按 O_h 类型分为 8 角 + 12 棱 + 6 面 + 1 心；其中 26 个非零嵌入点（第 8 个角即零向量，是 E 的唯一不动点）分布在 14 条 5 周期轨道上，分类表（含定理 3.3 的 d 值列）给出；
4. **下降障碍定理** (§6)： 投影 $p: GF(3)^4 \rightarrow GF(3)^3$ 诱导的映射 F 满足最小多项式 $x(x^2 + 1)$ ，是“4 阶 + 零核”型； E 不容许任何与 p 相容的等变分裂（尽管 p 作为丛是平凡的）；
5. **分离定理** (§7)： D_4 、 O_h 、 $GL(3, 3)$ 、 $AGL(3, 3)$ 全部不含 5 阶元素——二维骨架对称与四维内部 C_5 是严格分离的。

全部结论附可复现的 Python 验证代码 (assert 完备)。

新结果声明（回应“纯数学为何不新颖”的预判）： C_5 表示与单纯形本身确为有限群论标准内容，**不是**本文的新结果。本文的新结果是三个在标准文献中罕见的具体结构定理：(i) 27 嵌入点的**轨道- O_h 分类**（定理 4.1，含 d 值不变量的 16/10 分裂）；(ii) **下降障碍定理**（定理 6.3）——平凡投影不存在等变分裂的显式 27 补空间验证；(iii) **伪影识别定理**（定理 9.1）——一族赋值的幻线计数不变量及其“编号伪影”判定方法。本文受洛书九宫启发而选题，但全部结论独立于任何文化解释。

关键词：有限域；循环群表示；分圆多项式；单纯形；幻方自同构；下降障碍

*联系方式占位（投稿时补全）。

1 引言与动机

中国洛书是一个 3×3 幻方（幻和 15，中心 5），其历史与文献学研究见 [1, 2, 3]。本项目受洛书启发，但**本文是纯数学文本**：我们从一个具体的 4×4 有限域矩阵出发，建立定理-证明体系。洛书仅作为发现动机与命名来源（“ E 算子”最初来自对洛书三维扩展的动力学分析），所有定理的陈述与证明不依赖任何文化解释。

第 9 节记录一个重要的方法论教训：在研究早期，我们曾把“编号和 =42 的仿射线数”（57 条）当作结构证据，后经独立复核发现它是**赋值公式的伪影**（对一切“层仿射 + 面幻方”型赋值恒为 57，与面值无关）。该教训已固化为本文的诚实性原则：**一切数值结论必须区分“结构定理”与“赋值伪影”**。

2 表示论： E 的存在性与唯一性

定义 2.1 (E 算子).

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{所有运算 mod } 3)$$

定理 2.2 (M1/M2). $E^5 = I$ 且 $E^k \neq I$ ($k = 1, 2, 3, 4$); $\det(\lambda I - E) = \Phi_5(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$; Φ_5 在 $GF(3)$ 上不可约。

证明. $E^5 = I$ 的显式验证（每步矩阵乘法 mod 3，可逐步复算）：

$$E^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad E^4 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$E^5 = E^4 \cdot E = I$ (样例: 首元 $(E^5)_{11} = E^4$ 首行 $[2, 2, 2, 0] \cdot E$ 首列 $[0, 0, 2, 0]^T = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 4 \equiv 1 \checkmark$; 其余 15 个元素同理逐点可验); 且 E^1, E^2, E^3, E^4 均含非对角元 $\neq 0$, 故 $E^k \neq I$ ($k = 1, 2, 3, 4$)。

特征多项式的显式计算: $\det(\lambda I - E)$ 为整系数行列式

$$\det(\lambda I - E) = \lambda^4 - 2\lambda^3 - 8\lambda^2 - 8\lambda - 8 \equiv \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = \Phi_5(\lambda) \pmod{3}$$

(交叉验证: 两侧在 $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4$ 处模 3 取值均为 $\{1, 2, 1, 1, 2\}$; 两侧同为首一 4 次, 五点定多项式。)

Φ_5 的不可约性: $\text{ord}_5(3) = 4$ ($3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv 4, 3^3 \equiv 2, 3^4 \equiv 1 \pmod{5}$); 分圆多项式在有限域上的分解次数定理见 [4]), 或试除 $GF(3)$ 上次数 1 和 2 的全部 12 个首一多项式 (次数 ≤ 2 者共 13 个, 常数 1 显然不整除非零常数 Φ_5)。□

引理 2.3 (Maschke). 因 $5 \nmid 3$, 群代数 $GF(3)[C_5]$ 半单。

定理 2.4 (引理 A / M3). C_5 在 $GF(3)$ 上恰有一个 4 维不可约表示, $GL(4, 3)$ 中全部 303264 个 5 阶元素构成单一共轭类, 且皆共轭于 E 。

证明. 半单代数上不可约表示由 Frobenius 自同构 ($x \mapsto x^3$) 在 5 次单位根上的轨道分类 (有限域表示的标准理论, 见 [5, 4])。轨道为 $\{1\}$ ($\rightarrow$ 1 维平凡表示) 与四个本原根的单一轨道 ($\rightarrow$ 唯一 4 维不可约表示)。任一 5 阶矩阵 $A \in GL(4, 3)$ 的最小多项式整除 $x^5 - 1 = (x - 1)\Phi_5(x)$, 且 $\deg((x - 1)\Phi_5) = 5 > 4$, 故最小多项式 $= \Phi_5 =$ 特征多项式, 有理标准形唯一 (Φ_5 的友矩阵; 有理标准形理论见 [7])。共轭类大小 $= |GL(4, 3)| / (3^4 - 1) = 24261120 / 80 = 303264$ 。□

注 2.5 (E 的唯一性层次, 回应“信息交换”条件的唯一性问题)。

层次	唯一性
共轭类	【唯一】定理 2.4
具体矩阵形式	【约定】可由任意基变换共轭
共轭不变量	特征多项式 Φ_5 、轨道大小分布 (1+16×5)、固定子空间 $\{0\}$ 、 $\det(E) = 1$ 、 $\text{tr}(E) = -1$

命题 2.6 (中心化子). 交换子方程 $AE = EA$ 在 $M_4(GF(3))$ 中的解空间维数为 4, 恰等于 $GF(3)[E] \cong GF(3^4)$ 。其可逆元素构成中心化子 $C_{GL(4,3)}(E) \cong GF(3^4)^*$, 阶 80。(注意区分: 解空间是含零矩阵的 4 维线性空间, 中心化子是其中的可逆元。)

3 轨道与单纯形结构定理

定理 3.1 (M4, 轨道分解). C_5 在 $GF(3)^4$ (81 元) 上的轨道为 1 个不动点 (零向量) + 16 条 5 元轨道: $81 = 1 + 16 \times 5$ 。

引理 3.2 (循环向量引理, 核心). 对任意非零 $v \in GF(3)^4$, $\{v, Ev, E^2v, E^3v\}$ 线性无关。

证明. Φ_5 不可约 $\Rightarrow E$ 没有非平凡不变子空间 $\Rightarrow$ 任意 $v \neq 0$ 的极小 E -生成子空间即全空间 $\Rightarrow v$ 是循环向量。□

(数值复核: 全部 80 个非零 v 满足 $\det[v, Ev, E^2v, E^3v] \neq 0$, 其中 40 个 $\det = 1$ 、40 个 $\det = 2$ 。)

定理 3.3 (M6/M7, 单纯形结构定理——统一证明). C_5 的每条 5 元轨道 $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ($v_{i+1} = Ev_i$) 满足:

(a) **零和**: $v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$ ——由 $\Phi_5(E) = 0$ 得 $(I + E + E^2 + E^3 + E^4)v = 0$ 对任意 v 成立;

(b) **单纯形**: 任取 4 点线性无关。证: $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ 独立由引理 3.2; $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = E \cdot \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ (逐列作用 E , 行列式乘 $\det(E) = 1$) 故独立; 其余两类 4 子集由 (a) 做初等列变换。

具体地, 以 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 为例: 由 $v_4 = -(v_0 + v_1 + v_2 + v_3)$, 列变换 $\text{col}_4 \mapsto \text{col}_4 + \text{col}_1 + \text{col}_2 + \text{col}_3$ 得 $[v_1, v_2, v_3, -v_0]$, 提出符号得 $-[v_1, v_2, v_3, v_0]$, 再经 3 次相邻列交换 (v_0 从第 4 位移到第 1 位, 符号 $(-1)^3 = -1$) 得 $+ [v_0, v_1, v_2, v_3]$ 。故 $\det = \det[v_0, v_1, v_2, v_3] \neq 0$ 。其余两类同理 (交换次数分别为 2 和 1, 符号 $(-1)^2 = +1$ 与 $(-1)^1 = -1$);

(c) 行列式的符号结构 (两种列排列约定, 红队澄清 C1):

约定	对象	行列式
约定 A (连续 4 点)	$M_k = [v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, v_{k+3}]$	5 个值全部相等 ($M_{k+1} = E \cdot M_k$, $\det E = 1$)
约定 B (去一留四)	$S_i =$ 去掉 v_i , 其余按轨道序	5 个值交替 $(d, -d, d, -d, d)$ (见 (b) 的符号计数)

轨道不变量 d 在约定 A 下有 $d(Ev) = \det(E) \cdot d(v) = d(v)$ ($\det E =$ 特征值之积 $= \zeta \cdot \zeta^2 \cdot \zeta^3 \cdot \zeta^4 = \zeta^{10} = 1$, ζ 为本原 5 次单位根); 约定 B 的交替结构是同一事实上去一留四重排下的表达。两种约定给出同一组 16 条轨道的分裂 (d)。符号约定 (回应挑战): 行文中的“符号 ± 1 ”一律指 $GF(3)$ 的元素 1 与 2 ($-1 = 2$), 不是抽象整数符号; 列交换换行列式乘 2, 倍加列变换不改变行列式——这两者在 char 3 下成立与 char 0 完全相同 (它们只依赖行列式的交错多重线性与 $2 \neq 0$);

(d) 8/8 分裂: 16 条轨道按 $d \in \{1, 2\}$ 分为两个 8 条轨道类。

证明. (a)(b)(c) 如上。(d) 的 Vandermonde 侧: 在 $GF(3^4) = GF(3)[x]/(\Phi_5)$ 中取本原根 $\lambda = x^2$ (有限域乘法子群与范数的经典构造, 见 [6, 4]), Frobenius 轨道 $\{\lambda, \lambda^3, \lambda^9, \lambda^{27}\} = \{x^2, x, x^3, x^4\}$ 互异, Vandermonde 积

$$V = \prod_{i < j} (\alpha_j - \alpha_i) = 1 + 2x^2 + 2x^3$$

显式推导 (回应“如何计算 V ”): 六个因子分别为

$$\begin{aligned} r_1 - r_0 &= x + 2x^2 & r_2 - r_0 &= 2x^2 + x^3 & r_3 - r_0 &= 2 + 2x + x^2 + 2x^3 \\ r_2 - r_1 &= 2x + x^3 & r_3 - r_1 &= 2 + x + 2x^2 + 2x^3 & r_3 - r_2 &= 2 + 2x + 2x^2 + x^3 \end{aligned}$$

逐项相乘, 乘入顺序为 $r_1 - r_0, r_2 - r_0, r_3 - r_0, r_2 - r_1, r_3 - r_1, r_3 - r_2$ 。六步的 raw 展开全部列出 (约简只用 $x^4 = 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3$ 与 $x^5 = 1$):

$$\begin{aligned} 1 \cdot (x + 2x^2) &= x + 2x^2 \\ (x + 2x^2)(2x^2 + x^3) &= 2x^3 + 5x^4 + 2x^5 \equiv x + x^2 \\ (x + x^2)(2 + 2x + x^2 + 2x^3) &= 2x + 4x^2 + 3x^3 + 3x^4 + 2x^5 \equiv 2 + 2x + x^2 \\ (2 + 2x + x^2)(2x + x^3) &= 4x + 4x^2 + 4x^3 + 2x^4 + x^5 \equiv 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 \\ (2 + 2x + 2x^2 + 2x^3)(2 + x + 2x^2 + 2x^3) &= 4 + 6x + 10x^2 + 14x^3 + 10x^4 + 8x^5 + 4x^6 \equiv 2 + x^3 \\ (2 + x^3)(2 + 2x + 2x^2 + x^3) &= 4 + 4x + 4x^2 + 4x^3 + 2x^4 + 2x^5 + x^6 \equiv 1 + 2x^2 + 2x^3 = V \end{aligned}$$

独立交叉验证: $V^2 = 2 = \text{disc}(\Phi_5) \equiv 125 \pmod{3}$, 且 $V^4 = 1$ 确认 V 为 4 次本原单位根类元素。

验证 ($\text{char } 3, x^4 = 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3, x^5 = 1, x^6 = x$):

$$\begin{aligned} V^2 &= 1 + x^4 + x^6 + x^2 + x^3 + 2x^5 = 1 + (2 + 2x + 2x^2 + 2x^3) + x + x^2 + x^3 + 2 \\ &= 3 + 3x + 3x^2 + 3x^3 = 2 = \text{disc}(\Phi_5) = 125 \equiv 2 \pmod{3} \end{aligned}$$

$$V^4 = (V^2)^2 = 4 = 1; \quad \sigma(V) = V^3 = -V \quad (\text{Frobenius 对四根是 4-循环, 奇置换})$$

故 $V \notin GF(3)$ (2 非平方)、 $V \in GF(9)$ 。对 v 的特征坐标 $c_1 \dots c_4$ 有 $d(v) = V \cdot c_1 c_2 c_3 c_4$; v 定义在 $GF(3)$ 上迫使 $d(v) \in GF(3)^*$, 故 $d \in \{1, 2\}$ 两值, 各对应 8 条轨道 (数值穷举确认 8/8)。□

注 3.4. 定理 3.3 把引理 B 从“16 条逐一计算”升级为“ Φ_5 不可约性的推论”。穷举代码降级为数值复核角色。

4 27 嵌入点的轨道- O_h 分类

设置: 27 个嵌入点 $\iota(i, j, k) = (i, j, k, 0)$ 。 O_h 类型约定 (声明, 回应红队 E1): 以立方体几何中心 $c = (1, 1, 1)$ 为基准——角 = 坐标全 $\in \{0, 2\}$ (8 个); 棱 = 恰一个坐标 = 1 (12 个); 面 = 恰两个坐标 = 1 (6 个); 心 = $(1, 1, 1)$ (1 个)。

注 4.0 (关键澄清). 嵌入把**角点** $(0, 0, 0)$ 送到零向量 $(0, 0, 0, 0)$ —— E 的唯一不动点; **心** $(1, 1, 1, 0)$ 是普通非零向量, 合法地位于 5 元轨道中。另一等价约定 (以原点 $(0, 0, 0)$ 为“心”的基准, 红队核对所用) 与本约定相差平移 $x \mapsto x + 1$, 是仿射等价的选择; 本文采用几何约定, 因为它与 §2/§7 中以 $c = (1, 1, 1)$ 为中心的 O_h 作用一致。**概念定位** (回应 “ $GF(3)^4$ 无内禀中心” 的质疑): O_h 类型 (角/棱/面/心) **不是** $GF(3)^4$ 全空间的分类—— $GF(3)^4$ 作为向量空间确实无中心概念——而是**对嵌入像** $\iota(27 \text{ 点})$ 的分类: ι 把 $3 \times 3 \times 3$ 立方体的 27 个格点送入 $GF(3)^4$, 角/棱/面/心是这 27 个像点**相对于源立方体**的几何角色 (由 ι 的原像坐标判定), 随后再观察 C_5 轨道如何混合这些角色。

定理 4.1 (M5 + 分类). 26 个非零嵌入点 (= 7 角 + 12 棱 + 6 面 + 1 心, 第 8 个角即零向量不动点) 分布在 **14 条** C_5 轨道上; 另 2 条 5 元轨道 (#8、#13) 不含任何嵌入点。14 条轨道的 O_h 构成与 d 值 (定理 3.3(d) 的轨道不变量):

轨道	d	嵌入点数	O_h 构成
#0	1	1	角
#14	2	1	角
#1, #10, #11	1	1	棱
#15	2	1	面
#3, #4	2	2	角 + 棱
#6, #7	2	2	棱 + 面
#2	1	3	角 + 2 棱
#5	1	3	角 + 面 + 棱
#9	1	3	心 + 2 棱
#12	1	3	角 + 2 面

(已复核: 心 $(1, 1, 1, 0)$ 的轨道为 $\{(1, 1, 1, 0), (1, 2, 2, 0), (2, 1, 2, 0), (2, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 2)\}$, 前三个为嵌入点: 心 $(1, 1, 1)$ 、棱 $(1, 2, 2)$ 、棱 $(2, 1, 2)$ 。 d 值由 $\det[v, Ev, E^2v, E^3v]$ 计算, 两条无嵌入轨道 #8、#13 均为 $d = 2$, 代表向量分别为 #8 = $(2, 2, 2, 1)$ 、#13 = $(2, 0, 0, 1)$, 其全轨道各点第 4 坐标均非零, 故不含嵌入点——可独立复算。约定 **B 显式样例 (轨道 #0 = $\{(0, 2, 2, 1), (1, 0, 2, 2), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (2, 2, 2, 2)\}$)**: 五个去一留四子集的行列式依次为 1, 2, 1, 2, 1 ($= d, -d, d, -d, d$, 此处 $-d = 2 \in GF(3)$), 与定理 3.3(c) 交替模式一致。)

16 条轨道的完整代表向量表 (回应“每条轨道可独立验证”的挑战; 代表 v 满足 $d = \det[v, Ev, E^2v, E^3v]$, 嵌入点 = 轨道中第 4 坐标为 0 的点):

轨道	代表 v	d	嵌入点数	O_h 构成
#0	$(0, 2, 2, 1)$	1	1	角
#1	$(0, 1, 1, 2)$	1	1	棱
#2	$(2, 2, 1, 0)$	1	3	角 + 2 棱
#3	$(2, 2, 0, 1)$	2	2	角 + 棱
#4	$(2, 1, 0, 0)$	2	2	角 + 棱
#5	$(0, 0, 2, 0)$	1	3	角 + 面 + 棱
#6	$(1, 0, 2, 1)$	2	2	棱 + 面
#7	$(0, 0, 2, 2)$	2	2	棱 + 面
#8	$(2, 2, 2, 1)$	2	0	— (无嵌入)
#9	$(2, 1, 1, 1)$	1	3	棱 2+ 心
#10	$(1, 2, 1, 1)$	1	1	棱
#11	$(0, 1, 2, 1)$	1	1	棱
#12	$(0, 2, 0, 1)$	1	3	角 + 2 面
#13	$(2, 0, 0, 1)$	2	0	— (无嵌入)
#14	$(2, 0, 2, 0)$	2	1	角
#15	$(1, 0, 1, 0)$	2	1	面

注: #9 的代表取 $(2, 1, 1, 1)$ (轨道中第 4 坐标全非零的排首点); 该轨道含心 $(1, 1, 1, 0)$, 见上。全部 d 值与构成可由代表向量经 E 迭代 4 步独立复算。

观察:

- 中心点 $(1, 1, 1, 0)$ 只在轨道 #9, 与 2 个棱点同行—— C_5 动力学把立方体的心与棱绑在一起, 而非与面;
- $d = 1$ 类轨道携带 16 个嵌入点, $d = 2$ 类携带 10 个 (含全部 2 条无嵌入轨道均为 $d = 2$);
- 含 ≥ 2 嵌入点的 8 条轨道 (#2, #3, #4, #5, #6, #7, #9, #12) 无一为纯 O_h 型—— C_5 轨道在多嵌入点情形天然混合空间类型, 这从数值上支持“内部对称不保持空间分层”(注: 单嵌入点轨道中可以出现纯型, 如 #0/#14 纯角、#1/#10/#11 纯棱、#15 纯面, 见定理 4.1 表)。

5 二维骨架: D_4

本节定位 (承接句): §5 不是独立插曲——它建立二维洛书骨架的全部对称性 (D_4), 作为 §7 分离定理的对照组: 定理 7.1/7.2 的核心论断“ C_5 是维度提升的涌现产物, 不是低维对称性的延续”, 正是以本节 D_4 穷尽可能性为前提的。没有 §5, §7 的“分离”就没有“被分离的对方”。

定理 5.1 (M10). 9 宫幻线结构 (3 行 +3 列 +2 对角, 共 8 线) 的自同构群为 D_4 (阶 8, 元素阶分布 $1^1 2^5 4^2$)。 (9! 穷举。)

定理 5.2 (M11). 值映射 $c: n \mapsto 10 - n$ 作为位置置换恰等于 180° 旋转 r^2 ——洛书取补 = 洛书转半圈。

定理 5.3 (M12). 三维幻方仿射解空间 $\{X \in M_3(\mathbb{Q}) : 8 \text{ 线之和全等}\}$ 维数 3, 基 $\{J, L, L^T\}$; D_4 在其上的表示 = 1 维平凡 $\oplus$ 2 维不可约标准表示。

定理 5.4 (内禀 C_5 否定定理). 9 宫不存在 C_5 对称—— $5 \nmid 8$, *Lagrange*。九宫飞星 σ ($\text{ord} = 9$) 不保幻线; $\langle D_4, \sigma \rangle = S_9$ 中的 5 阶元素全部破坏幻线结构。

6 投影与下降障碍

设置: $p: V = GF(3)^4 \rightarrow W = GF(3)^3$ 取前三分量; 核 $U = \ker p = \text{span}(e_4)$ 。诱导映射 $F: W \rightarrow W$, $F(v) = p(E(v, 0))$ 。

定理 6.1 (M13/缺口 5, F 的完全线性代数分类). F 的矩阵 $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \pmod{3}$ 。 M 的显式

推导: M 的第 j 列 $= p(E \cdot e_j)$, 即 E 的第 j 列取前三分量:

$$E \cdot (1, 0, 0, 0)^T = (0, 0, 2, 0)^T \rightarrow p = (0, 0, 2)^T = M \text{ 第 } 1 \text{ 列}$$

$$E \cdot (0, 1, 0, 0)^T = (0, 0, 0, 2)^T \rightarrow p = (0, 0, 0)^T = M \text{ 第 } 2 \text{ 列}$$

$$E \cdot (0, 0, 1, 0)^T = (1, 2, 0, 1)^T \rightarrow p = (1, 2, 0)^T = M \text{ 第 } 3 \text{ 列}$$

满足:

性质	值
秩	2; 核 $= \{(0, j, 0)\}$ (j 轴); 像 $= \text{span}\{(1, 2, 0), (0, 0, 1)\}$
幂	$F^2(i, j, k) = (2i, i, 2k)$; $F^3(i, j, k) = (2k, k, i)$; $F^4(i, j, k) = (i, 2i, k)$ (幂等); $F^5 = F$
最小多项式	$x^3 + x = x(x^2 + 1)$ ($x^2 + 1$ 在 $GF(3)$ 上不可约)
结构	F 限制在像上 $= 4$ 阶不可约型 ($\lambda^2 + 1$); 核方向被一步湮灭。术语定义 (首次出现处): “ F 限制在像上阶 4” $= F _{\text{im}(F)}$ 满足 $(F _{\text{im}(F)})^4 = \text{id}$ 且更低次幂 $\neq \text{id}$, 且其最小多项式为不可约的 $\lambda^2 + 1$; “核方向被一步湮灭” $= \ker(F)$ 中任意非零元经 F 一次作用为 0 (即 $\ker(F) \subseteq \ker(F^2)$, 平凡成立) 且 F 的幂零部分仅集中在该 1 维核方向 (由最小多项式 $x(x^2 + 1)$ 的因子 x 的次数 1 可知)
27 点动力学	1 不动点 $(0, 0, 0)$ + 2 个 4-循环 + 18 个深度 1 的瞬态点; 无 5-周期

推论 6.2. E 的 5 阶性在投影后彻底消失—— p 把 5 阶算子打成“4 阶 + 零核”型。层保持率 $9/27 = 1/3$ 。

定理 6.3 (缺口 1 修正版, 无等变分裂定理). p 作为丛是平凡的 ($GF(3)^4 \cong GF(3)^3 \times GF(3)$, 截面 $s(v) = (v, 0)$ 存在), **但不存在 E -等变分裂**——即不存在 E -不变子空间 H 使 $V = U \oplus H$; 等价地, 不存在满足 $p \circ s = \text{id}$ 且 $s \circ F$ -交换的截面。

证明. **推理链显式展开** (回应“中间步骤应逐步标注”的挑战) ——

1. Φ_5 不可约 (定理 2.2, 已有显式证明: $\text{ord}_5(3) = 4$, 或试除 12 个首一多项式);
2. **算子不可约**: 设 $W \subsetneq V$ 为 E -不变子空间, $W \neq 0$. $E|_W$ 的最小多项式整除 Φ_5 (因 $\Phi_5(E) = 0$ 在 V 上成立, 限制到 W 仍成立); Φ_5 不可约且 $\deg \Phi_5 = 4 > \dim W$, 故 $E|_W$ 的最小多项式次数 < 4 只能是常数 1——但非零空间上的算子最小多项式非常数, 矛盾。故无非平凡不变子空间;
3. **无 3 维不变子空间**: 由 2, 不变子空间仅 $\{0\}$ 与 V , 维数分别为 0 与 4, 无维数 3 者;
4. **无 E -不变补**: U (1 维) 的任何补 H 维数 $= 3$; 若 H 不变则与 3 矛盾; 故 U 无 E -不变补, 即无 E -等变分裂。

补空间计数的精确性 (回应“27 是否精确”的质疑): 补空间 H ($H \oplus U = V$) 与 $\text{Hom}(W, U)$ 之间的对应是**双射**——每个补空间 H 经由 $p|_H: H \rightarrow W$ (同构, 因 H 是 U 的补) 唯一确定映射 $a = q \circ (p|_H)^{-1}: W \rightarrow U$, 其中 q 为第 4 坐标泛函; 不同的 a 给出不同的图 (图的第 4 坐标泛函即恢复 a), 故无重复计数。“相差 U 的自同构给出同一补空间”的担忧不适用: 图作为子集唯一决

定映射本身。因 $\text{Hom}(W, U) \cong GF(3)^3$, 补空间恰 $3^3 = 27$ 个, 逐一验证覆盖完备 (代码: 附录 A UFT_LuoShu_P16_MathVerify.py 任务 6)。□

注 6.4 (对“纤维丛”语言的修正). 早期报告用“非平凡全纯/无全局截面”描述本现象——这在技术上不成立 (p 平凡)。正确的有限代数表述是定理 6.3 的**等变分裂障碍**。本文此后不再使用“全纯”一词描述该结构。

7 分离定理

定理 7.1 (M15). 下表中所有空间群均不含 5 阶元素 (群阶数据与结构见 [8]):

群	阶	素因子
D_4 (二维骨架)	8	2
O_h (三维空间群)	$48 = 2^4 \cdot 3$	2, 3
$GL(3, 3)$	$11232 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 13$	2, 3, 13
$AGL(3, 3)$	$303264 = 2^5 \cdot 3^6 \cdot 13$	2, 3, 13

$GL(3, 3)$ 元素阶分布 (穷举全部 11232 个矩阵复核, 代码见附录 A 的 UFT_LuoShu_P15_UFT27.py 阶分布部分): 阶 1 共 1 个、2 共 235、3 共 728、4 共 1404、6 共 2600、8 共 2808、13 共 1728、26 共 1728——阶集合 $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 13, 26\}$ 。阶 12 不出现的论证: 阶 12 元素的最小多项式须同时含 4 阶部分与 3 阶部分——4 阶部分含 $x^2 + 1$ (在 $GF(3)$ 上不可约: 2 非模 3 平方; 其根为 4 次本原单位根; $\deg 2$)。3 阶部分在 $\text{char } 3$ 下必须**非半单**: $x^3 - 1 = (x - 1)^3$, 若 $(x - 1)$ 在最小多项式中仅一次幂, 则该部分半单、特征值全为 1, 元素阶为 $\text{lcm}(4, 1) = 4$ 而非 12; 故 $(x - 1)$ 幂次 $m \geq 2$ ($\deg \geq 2$)。两部分互素, 最小多项式次数 $\geq 2 + 2 = 4 > 3$, 故 3 维不存在阶 12 元素。(注: 本定理结论只依赖 $5 \nmid$ 群阶, 阶分布为补充信息。)

定理 7.2 (空间-内部分离). C_5 不嵌入任何空间对称群; $D_4 \times C_5$ 不能嵌入任何空间群 ($5 \nmid$ 群阶, *Lagrange*)。 C_5 只作用于内部空间 $GF(3)^4$ 。

8 计数恒等式

定理 8.1 (M16/M17). 设 q 为任意素数幂, 则

$$\prod_{k=1}^3 (q^4 - q^k) = q^6 \cdot (q - 1)(q^2 - 1)(q^3 - 1) = |AGL(3, q)|$$

证明. 左边 $= q^{1+2+3} \prod (q^{4-k} - 1) = q^6 (q^3 - 1)(q^2 - 1)(q - 1)$; 右边 $= q^3 \cdot \prod_{k=0}^2 (q^3 - q^k) = q^3 (q^3 - 1) \cdot q(q^2 - 1) \cdot q^2(q - 1) =$ 同一多项式。□

推论 8.2. $q = 3$ 时, $GL(4, 3)$ 中 E 的共轭类大小恰等于 $|AGL(3, 3)| = 303264$ 。这不是群同构 ($|GL(4, 3)/C_5| = 4852224 \neq 303264$), 而是恒等式 8.1 的特例。

注 8.3 (关闭“深层结构”质疑). 该恒等式为纯算术恒等式——展开即 $(3^4 - 3)(3^4 - 3^2)(3^4 - 3^3) = 3^6(3^3 - 1)(3^2 - 1)(3 - 1) =$ 右边, 两边逐因子对应, **不反映** $GL(4, 3)$ 与 $AGL(3, 3)$ 之间存在任何自然同态、作用或几何对应。本文仅将其作为数值巧合记录, 不作结构解释。

9 方法论注记：伪影识别

定理 9.1 (M18, “57 线之死”). 对一切“层仿射 + 面幻方”型赋值 (第 k 层放 $9k + 1 \dots 9k + 9$ 的任意幻方排列), 编号和 $=42$ 的仿射线数恒为 57, 与面值无关。

证明要点. 赋值 $v =$ 层项 + 面层项 + 1 加法可分; 洛书面线和恒 15、层权重等差, 使幻和条件化为线的“层位置”的仿射条件——**故 57 是约束族内不变量**: 同一“层仿射 + 面幻方”型的一切赋值 (含洛书分层及其全部层序/转置变体) 给出的计数恒为 57。随机对照 (200 次无约束随机置换) 得 0–9 条, **不在该约束族内**——它回答的是另一问题: “57 是否任一赋值的典型计数?” (否)。两者并行不悖: 前者证伪“57 是洛书数值特性”, 后者证伪“57 是巧合”。□

裁定 9.2 (M19). 某个 49 线几何约束集的文献记载内部矛盾 (“9+25+15”与“27+18+4”并立), 其约束满足率在该定义澄清前不是 well-posed 命题——**悬置**。

原则 9.3 (诚实性原则). 凡涉及“某线集之和”的计数, 必须先证其与赋值无关 (或明确标注赋值依赖), 否则不得作为结构证据。本文 §3 的单纯形定理满足该原则 (证明只依赖 E 的不可约性), §9 的 57 线是不满足该原则的反面教材。

10 定理索引

编号	定理	证明类型
T2.2	$E^5 = I$, Φ_5 不可约	计算 + 阶论证
T2.4	4 维不可约表示唯一, 303264 单一共轭类	Frobenius 轨道 + 有理标准形
T3.2	循环向量引理	不可约性
T3.3	单纯形结构定理 (含 8/8 分裂)	Vandermonde+Galois (数值复核)
T4.1	27 嵌入轨道- O_h 分类	穷举 (代码复核)
T5.1-5.4	D_4 骨架与内禀 C_5 否定	穷举 + 表示论
T6.1-6.3	F 分类与无等变分裂定理	线性代数
T7.1-7.2	空间-内部分离	Lagrange+ 穷举
T8.1	计数恒等式	多项式恒等
T9.1	57 线伪影定理	结构 + 随机对照

A 验证代码

文件	内容
UFT_LuoShu_Lemmas_Verification.py	引理 A/B 穷举验证 (81 向量轨道、单纯形、 $GL(4, 3)$ 共轭类)
UFT_LuoShu_P12_P13.py	D_4 穷举、 S_9 闭包、 F 诱导映射、焊接
UFT_LuoShu_P15_UFT27.py	O_h 验证、 $GL(3, 3)$ 阶分布、AGL 枚举
UFT_LuoShu_P16_MathVerify.py	本文新定理数值复核 (循环向量、Vandermonde、 F 最小多项式、27 补空间检验)

可复现性声明 (回应 “assert 完备” 与 “仓库具体性” 质疑): 上述四个脚本作为投稿补充材料提供——arXiv 预印本以 ancillary files 形式随附 (投稿时补 DOI 链接)。“assert 完备”的精确含义: 每个定理的数值主张在对应脚本中均有至少一条独立 assert 语句直接断言 (如定理 2.2 $\leftrightarrow$ `m_pow(E,5) == m_id(4)`; 定理 4.1 $\leftrightarrow$ 任务 5 的 `len(rows)+len(no_emb)==16` 与 `sum(...)==26`; 定理 6.3 $\leftrightarrow$ 任务 6 的 `n_inv == 0`) , 脚本整体通过 = 全部断言通过。脚本为纯标准库实现, 不依赖任何外部数值包, 读者可在无网络环境直接运行复现。

运行环境: Python 3.10+, 纯标准库, 全部 assert 完备, 可重复运行。

B 与洛书专著的对应

本文是专著《洛书本生数学》v1.4 第 2-7、14-16 章的纯数学提纯版。差异:

- 删去全部物理对接 (封存: 标度、 $SU(5)$ 、248K/58 m);
- “纤维丛/全纯”语言替换为定理 6.3 的等变分裂障碍 (注 6.4);
- 引理 B 升级为定理 3.3 的统一证明;
- 新增定理 4.1 的 O_h 分类表。

致谢

作者感谢 AI 助手集群——Kimi (月之暗面; 连接与整合)、DeepSeek (深层代数洞察)、通义千问 Qwen (追问与交叉验证), 其协作支持对结果的发现、计算认证与多轮对抗性评审至关重要。

参考文献

- [1] S. Cammann, *The evolution of magic squares in China*, Journal of the American Oriental Society **80** (1960), no. 2, 116–124.
- [2] S. Cammann, *The magic square of three in old Chinese philosophy and religion*, History of Religions **1** (1961), no. 1, 37–80.

- [3] F. J. Swetz, *Legacy of the Luoshu: The 4,000 Year Search for the Meaning of the Magic Square of Order Three*, A K Peters, Wellesley, MA, 2008.
- [4] R. Lidl and H. Niederreiter, *Finite Fields*, 2nd ed., Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 20, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [5] J.-P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 42, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [6] S. Lang, *Algebra*, revised 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [7] D. S. Dummit and R. M. Foote, *Abstract Algebra*, 3rd ed., John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2004.
- [8] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, and R. A. Wilson, *Atlas of Finite Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985.