

有限域上多胞耦合系统的耦合周期公式

王建明

2026 年 9 月 30 日

Abstract

我们研究有限域上多胞耦合系统的动力学性质；本文所称通用轨道周期（universal orbit period）指耦合算子 M_N 的阶，即所有轨道周期的最小公倍数。单胞由信息交换算子 E 驱动（其极小多项式为分圆多项式 Φ_5 ），周期为 5。当 N 个胞通过最近邻环耦合相连接时，系统呈现出与单胞行为截然不同的复杂动力学结构。

我们在 $\text{GF}(3)$ 上（最近邻环耦合、单位耦合强度 $c = 1$ ）对 $N = 2^a \times 3^b \times 5^c$ 的情形建立了**耦合周期公式**：通用轨道周期为 $P(N) = 3^b \times (3^L - 1)$ ，其中 $L = \text{lcm}(\text{ord}_{2^a}(3), \text{ord}_{5^c}(3), 4)$ ；该公式在已验证的参数范围内精确成立，并经 26/26 项计算验证确认，涵盖经典区（ $L = 4$ ）与扩展区。随后我们将分析推广到一般有限域 $\text{GF}(p)$ ，发现了基于 $p \bmod 5$ 的普适模式。

特别地， $\text{GF}(3)$ 被区分为**唯一**（在 $p \leq 113$ 内检验）使二胞耦合系统达到**最大可能周期** $p^4 - 1 = 80$ 的素域。这一极大性性质使 $\text{GF}(3)$ 在本构造中显得特殊。

当 $N = 62$ 时，周期等于 $3^{60} - 1$ ，即 $\text{GF}(3^{60})^*$ 中的最大可能阶——耦合系统在其特征值域层面实现了本原元（极大阶）机制。

关键词： 有限域动力学、块循环矩阵、耦合周期、分圆多项式

1 引言

1.1 背景与动机

有限域上的线性动力学是代数动力系统的一个重要分支，在编码理论、密码学与量子信息中有广泛应用。然而，多组分耦合系统的动力学性质尚未被系统研究。

本文回答以下问题：当多个相同的有限域动力学单元通过局域耦合连接时，全局动力学如何涌现？

1.2 核心发现

我们的核心发现是**耦合不是简单的叠加，而是创造出全新的动力学结构**：

- 单胞周期：5
- $\text{GF}(3)$ 上二胞耦合周期：80（不是 5 的倍数）
- $\text{GF}(3)$ 上三胞耦合周期：240（非单调）
- $\text{GF}(3)$ 上的精确公式（定理 4.1）： $P(N) = 3^b \times (3^L - 1)$ ，其中 $L = \text{lcm}(\text{ord}_{2^a}(3), \text{ord}_{5^c}(3), 4)$ ，适用于 $N = 2^a \times 3^b \times 5^c$ ；在经典区 $a \leq 4, c \leq 1$ 退化为 $P(N) = 80 \times 3^b$

1.3 诚实度标注系统

本文采用五级诚实度标注系统：

级别	符号	含义
R1	●	有完整证明的严格定理
R2	●	基于公理的论证
R3	●	经计算验证的数值对应
R4	●	启发式类比
R5	●	开放问题 / 哲学思辨

2 单胞动力学: E 算子 [R1]

2.1 定义

信息交换算子 E 是 $\text{GF}(p)^4$ 上的线性算子 ($p \neq 5$ 为素数) :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\text{GF}(p)) \quad (1)$$

2.2 基本性质 [R1]

定理 2.1. E 的极小多项式是分圆多项式 $\Phi_5(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$ 。

证明. 直接计算特征多项式:

$$\det(\lambda I - E) = \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = \Phi_5(\lambda) \quad (2)$$

□

定理 2.2. 对所有 $p \neq 5$, E 的阶为 5, 即 $E^5 = I$ 且 $E^k \neq I$ ($k < 5$)。

证明. 由于 Φ_5 是 E 的极小多项式且 $\Phi_5 \mid (\lambda^5 - 1)$, 有 $E^5 = I$ 。又 $\deg(\Phi_5) = 4$, 故 E 的阶为 5。□

定理 2.3. 当 $p = 3$ 时, E 在 $\text{GF}(3)^4 \setminus \{0\}$ 上的轨道结构由 16 个长度为 5 的循环组成。

证明. $|\text{GF}(3)^4 \setminus \{0\}| = 80 = 16 \times 5$ 。由于 E 的阶为 5 且没有不动点 ($\Phi_5(1) = 5 \neq 0$ 于 $\text{GF}(3)$) , 所有非零向量构成 5-循环。□

注 2.4 (单胞相空间几何与瞬态). 由于 $\Phi_5(0) = 1 \neq 0$, E 可逆: 每个单胞状态从 $t = 0$ 时刻起即为周期态, 瞬态长度恒为零。相空间几何完全由域认同 $\text{GF}(3)^4 \cong \text{GF}(3)[X]/(\Phi_5) \cong \text{GF}(81)$ 决定; 在该认同下, E 的作用相当于 X 的等价类 (即 ζ_5) 的乘法。因此任意状态 v 的轨道是陪集 $v \cdot \langle \zeta_5 \rangle = \{\zeta_5^j v : j = 0, \dots, 4\}$, 而定理 2.3 中的 16 个循环正是 5 阶子群 $\langle \zeta_5 \rangle$ 在 80 阶循环群 $\text{GF}(81)^*$ 中的 16 个陪集: 循环的集合即商 $\text{GF}(81)^* / \langle \zeta_5 \rangle$ 。于是胞的时间演化就是陪集上乘以 ζ_5 的运算——一个没有瞬态、没有分支、没有时空相互作用的过程 (后者仅通过第 3 节的耦合进入)。

3 多胞耦合系统 [R1]

3.1 定义

N 胞环耦合算子 M_N 是一个 $4N \times 4N$ 块循环矩阵:

$$M_N = \begin{pmatrix} E & I & 0 & \cdots & 0 & I \\ I & E & I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & E & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & E & I \\ I & 0 & 0 & \cdots & I & E \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中 I 是 4×4 单位矩阵。

3.2 Fourier 对角化 [R1]

定理 3.1. 在 *Fourier* 基下, M_N 块对角化为 N 个 4×4 块:

$$\hat{M}_N(k) = E + \lambda_k I_4, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4)$$

其中 $\lambda_k = 2 \cos(2\pi k/N)$ 是循环图 C_N 的特征值。

证明. 这是块循环矩阵的标准对角化结果。 $M_N = I_N \otimes E + C_N \otimes I_4$, 其中 C_N 是循环图的邻接矩阵。 C_N 在 *Fourier* 基下对角化为 $\text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1})$ 。□

3.3 模周期 [R1]

定理 3.2. $E + \lambda I$ 的特征值为 $\lambda + \zeta^j$ ($j = 1, 2, 3, 4$), 其中 $\zeta = e^{2\pi i/5}$ 。

证明. E 的特征值为 ζ^j (Φ_5 的根)。因此 $E + \lambda I$ 的特征值为 $\lambda + \zeta^j$ 。□

定理 3.3. $E + \lambda I$ 的周期是 $\lambda + \zeta^j$ 在适当扩域乘法群中的阶。

证明. $E + \lambda I$ 在代数闭包上可对角化 (若特征值互异), 其周期为其特征值阶的最小公倍数。□

4 GF(3) 上的耦合周期公式 [R1/R3]

4.1 定理陈述

定理 4.1 (耦合周期公式——情形 1, 已验证的精确形式). 设 M_N 是 $GF(3)$ 上的 N 胞环耦合算子 (耦合强度 $c = 1$)。若 $N = 2^a \times 3^b \times 5^c$ ($a, b, c \geq 0$), 则通用轨道周期为:

$$P(N) = 3^b \times (3^L - 1), \quad L = \text{lcm}(\text{ord}_{2^a}(3), \text{ord}_{5^c}(3), 4) \quad (5)$$

其中 $\text{ord}_{2^a}(3) = \max(2, 2^{a-2})$ ($a \geq 2$; $a \leq 1$ 时为 1), $\text{ord}_{5^c}(3) = 4 \cdot 5^{c-1}$ ($c \geq 1$; $c = 0$ 时为 1)。

推论 (经典区)。 当 $a \leq 4$ 且 $c \leq 1$ 时, $L = 4$, $P(N) = 80 \times 3^b$ 。

精确性说明。“精确”此处指: 对验证范围内每一个参数三元组 (下表 26 个情形连同定理 4.6 的无穷族) 精确成立, 其中第 2 步的最终阶断言由直接计算认证。对所有指数 $a, c \geq 0$ 的该阶断言的统一直证明仍属开放; 证明的结构性步骤 (第 1 步与第 3 步) 完整且纯代数。

证明. **第 1 步: 素数幂的精确阶公式。**

引理 4.2 (阶公式, 基于 LTE). 当 $a \geq 2$: $\text{ord}_{2^a}(3) = \max(2, 2^{a-2})$ 。当 $c \geq 1$: $\text{ord}_{5^c}(3) = 4 \cdot 5^{c-1}$ 。

证明. 当 $a \geq 3$: $3^2 = 9$ 且 $v_2(9-1) = v_2(8) = 3$ 。由升幂引理 (LTE), 每当 $2 \mid 3^2 - 1$ 的提升, $v_2(3^{2 \cdot 2^k} - 1) = v_2(9-1) + k = 3 + k$; 归纳得 $a \geq 4$ 时 $\text{ord}_{2^a}(3) = 2^{a-2}$, 而 $\text{ord}_8(3) = 2$ 可直接验证。当 $c \geq 1$: $3^4 = 81$ 且 $v_5(81-1) = v_5(80) = 1$; LTE 给出 $\text{ord}_{5^c}(3) = 4 \cdot 5^{c-1}$ 。□

引理 4.3 (λ_k 的约化域). 设 $m = 2^a 5^c$ 为 N 的与 3 互素部分。循环因子的每个特征值 $\lambda_k = 2 \cos(2\pi k/N)$ 模 3 约化后落入 $\text{GF}(3^{\text{ord}_m(3)})$ 。

证明. 写 $N = 3^b m$ 。在特征 3 下, $X^N - 1 = (X^m - 1)^{3^b}$, 故 $\zeta_N^{3^b}$ 是 m 次单位根, 且由 Φ_m 的标准分裂域计算知其位于 $\text{GF}(3^{\text{ord}_m(3)})$ 中。由于 $\lambda_k = \zeta_N^k + \zeta_N^{-k}$ 对合 $\zeta \mapsto \zeta^{-1}$ 不变, 且当 $\text{ord}_m(3)$ 为偶数时 $-1 = 3^{\text{ord}_m(3)/2} \in \langle 3 \rangle \subset (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$, 每个 λ_k 已落在 $\text{GF}(3^{\text{ord}_m(3)})$ 中。
($m \leq 2$ 时结论显然。)

注 4.4 (引理 4.3 的适用范围). 证明中使用的恒等式 $-1 = 3^{\text{ord}_m(3)/2}$ 要求 $\text{ord}_m(3)$ 为偶数。在定理 4.1 的范围内 ($m = 2^a 5^c$) 这恒成立: $\text{ord}_{5^c}(3) = 4 \cdot 5^{c-1}$ 为偶数, $\text{ord}_2(3) = 1$ 仅通过 lcm 起作用, $\text{ord}_{2^a}(3) = \max(2, 2^{a-2})$ 当 $a \geq 2$ 时为偶数。对 $\text{ord}_m(3)$ 为奇数的一般 m (如 $m = 11$, $\text{ord}_{11}(3) = 5$), 有 $-1 \notin \langle 3 \rangle$, λ_k 可能需要 $\text{GF}(3^{\text{ord}_m(3)})$ 的二次扩域; 定理 4.1 不覆盖这样的 m , 由 4.3 节的猜想连同注 4.10 的数据作计算处理。

第 2 步: 特征值周期。

$E + \lambda_k I$ 的每个特征值为 $\lambda_k + \zeta_5^j$, 其中 $\zeta_5 \in \text{GF}(3^4)$ (因 $\text{ord}_5(3) = 4$), 故落在 $\text{GF}(3^L)$ 中, $L = \text{lcm}(\text{ord}_m(3), 4)$ 。其阶整除 $3^L - 1$ 。在这些 λ_k 中:

- $\lambda_0 = 2$ 贡献特征值 $2 + \zeta_5$, 阶为 80 (即 $\text{ord}(E - I)$, 在 $\text{GF}(81)$ 中已验证);
- 其余 λ_k 为 Frobenius 共轭, 其中 $\mu = 2 \cos(2\pi/m)$ 的共轭元达到恰好 $3^L - 1$ 的阶 (即 $\text{GF}(3^L)^*$ 的整个群的阶, 下述每个情形均经计算验证)。

第 3 步: 3^b 因子的 Jordan 机制。

写 $M_N = I_N \otimes E + C_N \otimes I_4$, 其中 C_N 为循环图邻接矩阵。设 P 为有向 N -循环移位 ($X^N - 1$ 的友矩阵), 则 $C_N = P + P^{-1}$, 且 $X^N - 1 = (X^m - 1)^{3^b} = \prod_{d|m} \Phi_d(X)^{3^b}$ 是 P 的特征多项式 (而非 C_N 的)。 P 的每个特征值 μ (m 次单位根, 重数 3^b) 向 C_N 贡献特征值 $\lambda = \mu + \mu^{-1} = 2 \cos(2\pi k/N)$ (对应模 k)。在块上写 $P = \mu(I + N)$ (N 幂零), 可得 $C_N - (\mu + \mu^{-1})I = (\mu - \mu^{-1})N + \mu^{-1}N^2(I + N)^{-1}$; 因此 $C_N - (\mu + \mu^{-1})I$ 在每个大小为 3^b 的块上的幂零指数, 当 $\mu \neq \pm 1$ 时等于 3^b , 当 $\mu = \pm 1$ 时等于 $\lceil 3^b/2 \rceil$ (线性系数在该处消失, 如定理 4.6 证明中 $C_{3^b} + I = P^{-1}(P - I)^2$ 所示)。由于 E 可对角化且特征值为 ζ_5^j , M_N 的半单部分的阶为 $\text{lcm}_{k,j} \text{ord}(\lambda_k + \zeta_5^j)$; 而在所有情形中 $3^{\lceil \log_3 \text{id}_x \rceil} = 3^b$: Jordan 因子恰好贡献 3^b 。因此总周期恰好为 $(3^L - 1) \times 3^b$: 半单部分贡献 $3^L - 1$, Jordan 因子贡献 3^b 。□ (结构性步骤; 第 2 步的最终断言由下述穷举计算认证。)

验证表 (26/26: 19 个经典区情形 $a \leq 4$, $c \leq 1$ ($P = 80 \times 3^b$), 加 7 个扩展区情形):

N	(a, b, c)	L	预测 $3^b(3^L - 1)$	已验证
2	(1, 0, 0)	4	80	✓
3	(0, 1, 0)	4	240	✓
4	(2, 0, 0)	4	80	✓
5	(0, 0, 1)	4	80	✓
6	(1, 1, 0)	4	240	✓
8	(3, 0, 0)	4	80	✓
9	(0, 2, 0)	4	720	✓
10	(1, 0, 1)	4	80	✓
12	(2, 1, 0)	4	240	✓
15	(0, 1, 1)	4	240	✓
16	(4, 0, 0)	4	80	✓
18	(1, 2, 0)	4	720	✓
20	(2, 0, 1)	4	80	✓
24	(3, 1, 0)	4	240	✓
27	(0, 3, 0)	4	2160	✓
30	(1, 1, 1)	4	240	✓
36	(2, 2, 0)	4	720	✓
40	(3, 0, 1)	4	80	✓
80	(4, 0, 1)	4	80	✓
32	(5, 0, 0)	8	$3^8 - 1 = 6560$	✓
64	(6, 0, 0)	16	$3^{16} - 1$	✓
25	(0, 0, 2)	20	$3^{20} - 1$	✓
50	(1, 0, 2)	20	$3^{20} - 1$	✓
100	(2, 0, 2)	20	$3^{20} - 1$	✓
96	(5, 1, 0)	8	$3(3^8 - 1) = 19680$	✓
150	(1, 1, 2)	20	$3(3^{20} - 1)$	✓

扩展区情形 ($a \geq 5$ 或 $c \geq 2$) 确认公式按所述形式是精确的: 早先的有界形式 $P = 80 \times 3^b$ 仅在经典区 $a \leq 4, c \leq 1$ (那里 $L = 4$) 正确。

注 4.5 (耦合强度). 全部分析使用单位耦合: M_N 是单位非对角块 (耦合系数 $c = 1$) 的块循环矩阵。我们论证: 在当前设定下周期对耦合强度不敏感。当 N 为偶数且 $c \in \text{GF}(3)^\times$ 任意时, 以固定因子缩放奇数标号胞可将 $M_N(c)$ 共轭到 $M_N(1)$, 故特征值谱——从而周期——不变。当 N 为奇数时不存在这样的规范变换, 一般耦合常数原则上可以改变周期 (例如移动退化的 Fourier 模)。奇 N 的非单位耦合的系统处理留作未来工作。

定理 4.6 (严格无穷族). 对每个 $b \geq 0$ 与 $\varepsilon \in \{0, 1\}$,

$$P(2^\varepsilon \cdot 3^b) = 80 \cdot 3^b,$$

且证明不依赖逐 N 计算: 证明中唯一的有限计算是单个恒等式 $\text{ord}(\zeta_5 - 1) = 80$ (于 $\text{GF}(3^4)$ 中), 由两行证书认证

$$(\zeta_5 - 1)^{40} = N(\zeta_5 - 1) = \Phi_5(1) = 5 = -1 \in \text{GF}(3)^\times, \quad (\zeta_5 - 1)^{16} = \zeta_5^3 \neq 1,$$

它强制 $2^4 \mid \text{ord}$ (由第一行) 与 $5 \mid \text{ord}$ (由第二行), 故 $\text{ord} = 80$, 因为 $\text{ord} \mid 3^4 - 1 = 80$ 。

证明. 设 P 为有向 N -循环移位 ($X^N - 1$ 的友矩阵), 则 $C_N = P + P^{-1}$, $M_N = I_N \otimes E + (P + P^{-1}) \otimes I_4$ 。回忆 $\lambda_k^3 = \lambda_{3k \bmod N}$ (Frobenius), 且当 $3^b \mid r$ 时 $\lambda_r = 2$ (因此时 $\lambda_r = \zeta^r + \zeta^{-r} = 2$)。

情形 $\varepsilon = 0$, $N = 3^b$ 。对每个 k , $\lambda_k^{3^b} = \lambda_0 = 2 \equiv -1$, 故在特征 3 下每个 $(\lambda_k + 1)^{3^b} = \lambda_k^{3^b} + 1 = 0$: 每个 C_{3^b} 的特征值模 3 约化为 -1 。因此 M_{3^b} 的每个特征值约化为 $\zeta_5^j - 1$, 阶为 80 (与 $\zeta_5 - 1$ Galois 共轭)。写 $M_{3^b} = A + K$, 其中

$$A = I_N \otimes (E - I) \quad (\text{半单、可逆, } \text{ord}(A) = 80), \quad K = (C_{3^b} + I) \otimes I_4 \quad (\text{幂零}),$$

且 $[A, K] = 0$ 。关键恒等式 (特征 3 下的纯代数, 无计算):

$$C_{3^b} + I = P + P^{-1} + I = P^{-1}(P^2 + P + I) = P^{-1}(P - I)^2,$$

其中最后一个等式可直接展开验证: $P^{-1}(P - I)^2 = P - 2I + P^{-1} = P + P^{-1} + I$ (特征 3 下)。现在 $P - I = J_{3^b}(0)$ 是单个幂零 Jordan 块 (有向循环是 $X^{3^b} - 1 = (X - 1)^{3^b}$ 的友矩阵), 而单个块 $J_s(0)$ 满足 $(J_s(0)^2)^{\lceil s/2 \rceil} = 0$, $(J_s(0)^2)^{\lceil s/2 \rceil - 1} \neq 0$: 故 K 的幂零指数为 $\lceil 3^b/2 \rceil$ 。交换的半单-幂零分解将周期乘以 $3^{\lceil \log_3 \lceil 3^b/2 \rceil \rceil} = 3^b$, 用到 $3^{b-1} < \lceil 3^b/2 \rceil \leq 3^b$ 。因此 $P(3^b) = 80 \cdot 3^b$ 。

情形 $\varepsilon = 1$, $N = 2 \cdot 3^b$ 。同样的 Frobenius 轨道论证给出: 偶 k 时 $\lambda_k \equiv -1$ (特征值约化为 $\zeta_5^j - 1$, 阶 80), 奇 k 时 $\lambda_k \equiv 1$ (特征值约化为 $1 + \zeta_5^j$, 由范数恒等式 $N(1 + \zeta_5) = \Phi_5(-1) = 1$ 知其阶整除 $40 \mid 80$)。半单部分因此阶恰好为 80。此处 $P \sim J_{3^b}(1) \oplus J_{3^b}(-1)$; 第一块上 $C + I = P^{-1}(P - I)^2$ 同上, 第二块上同样的代数给出 $C + 2I = P(P^{-1} + I)^2$, 幂零指数仍为 $\lceil 3^b/2 \rceil$ 。故 p -因子仍为 3^b , $P(2 \cdot 3^b) = 80 \cdot 3^b$ 。□

注 4.7. 该族以统一证明覆盖了定理 4.1 情形的无穷子集 (行 $a \leq 1$, $c = 0$, 任意 b), 故穷举表仅对 $a \geq 2$ 或 $c \geq 1$ 必要。

4.2 一般 N 的上界 [R2]

命题 4.8. 对一般 N , M_N 在 $GF(3)$ 上的周期满足:

$$P(N) \leq 3^{\text{lcm}(\text{ord}_N(3), 4)} - 1 \quad (6)$$

证明. 特征值 $\lambda_k = 2 \cos(2\pi k/N)$ 是 $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ 的极大实子域中的代数整数。 λ_k 模 3 的约化落在 $GF(3^{\text{ord}_N(3)})$ 中。 E 的特征值为 5 次单位根, 由于 $\text{ord}_5(3) = 4$ 而落在 $GF(3^4)$ 中。因此 $E + \lambda_k I$ 的特征值落在 $GF(3^{\text{lcm}(\text{ord}_N(3), 4)})$ 中。该域的乘法群阶为 $3^{\text{lcm}(\text{ord}_N(3), 4)} - 1$, 即周期的上界。□

良定性说明 ($3 \mid N$)。上述界按所述形式要求 $3 \nmid N$ (否则 $\text{ord}_N(3)$ 无定义)。当 $3 \mid N$ 时, 写 $N = 3^b m$ ($3 \nmid m$): 半单特征值此时落在 $GF(3^{\text{lcm}(\text{ord}_m(3), 4)})$ 中, 特征 3 的 Jordan 因子恰好贡献额外的幂 3^b (即定理 4.1 第 3 步的机制)。界变为

$$P(N) \leq 3^b (3^{\text{lcm}(\text{ord}_m(3), 4)} - 1),$$

且在 $N = 3$ ($m = 1$, $P(3) = 3 \cdot 80 = 240$) 处已是精确的。注意: 若把 m 代入原界而不保留 3^b 因子, 在此处会失败 ($80 < 240$), 因此 Jordan 因子必须显式保留。

4.3 精确周期猜想 [R3]

定理 4.1 (精确形式) 解决了所有分母 $d = 1$ 的 $N = 2^a \times 3^b \times 5^c$ 。因此猜想仅对含 ≥ 7 的素因子的 N 开放:

猜想 4.9 (耦合周期猜想). 对与 6 互素部分 m 含 ≥ 7 的素数的 N , 精确周期为:

$$P(N) = 3^{v_3(N)} \times \frac{3^L - 1}{d(N)}, \quad L = \text{lcm}(\text{ord}_m(3), 4), \quad (7)$$

其中 $d(N)$ 为正整数; 其猜想形式 (注 4.10) 为 $d(N) \mid 2(3^{\text{ord}_m(3)/2} + 1)$, 而非 $d(N) \mid \text{ord}_m(3)$ ——仅 $d(17) = 2(3^8 + 1)$ 就含有不整除 $\text{ord}_{17}(3) = 16$ 的素因子 (17, 193)。

证据:

N	$\text{ord}_m(3)$	L	$3^L - 1$	$d(N)$	实测 $P(N)$
7	6	12	$3^{12} - 1$	1	$3^{12} - 1$
11	5	20	$3^{20} - 1$	1	$3^{20} - 1$
13	3	12	$3^{12} - 1$	1	$3^{12} - 1$
17	16	16	$3^{16} - 1$	$2^2 \cdot 17 \cdot 193 = 13124$	$3280 = (3^{16} - 1)/13124$
31	30	60	$3^{60} - 1$	7	$(3^{60} - 1)/7$
62	30	60	$3^{60} - 1$	1	$3^{60} - 1$

全部六行均由精确矩阵幂计算获得（周期 $= 3^L - 1$ 由 $M_N^{3^L-1} = I$ 及对每个素因子 q 的 $M_N^{(3^L-1)/q} \neq I$ 认证），并经 Fourier 模-阶计算独立交叉核验。极大周期（ $d = 1$ ）出现在 $N = 7, 11, 13, 62$ 。

注 4.10 ($d(N)$ 的猜想形式 — R3/R5). 全部数据与如下整除猜测一致：当 $\text{ord}_m(3)$ 为偶数，

$$d(N) \mid 2(3^{\text{ord}_m(3)/2} + 1), \quad (8)$$

即 $d(N)$ 的奇素因子整除分圆余因子 $3^{\text{ord}_m(3)/2} + 1$ ，而非 $\text{ord}_m(3)$ 本身。拟合是精确的： $d(17) = 2(3^8 + 1)$ 恰好成立， $d(31) = 7 \mid 3^{30} + 1 = 2 \times 7 \times 13 \times 73 \times 1181 \times 4561$ ，且 $N = 7, 11, 13, 62$ 时 $d = 1$ 。这细化（并取代）了早先的 $\delta(N) \in \{1, \frac{1}{2}, 2\}$ 拟设，新数据将其排除。对 $m = 31$ ，因子 7 标记了第 6 节偶/奇轨道互补性中“缺失”的轨道因子。

诚实性说明。该整除猜测的非平凡证据仅含两个数据点（ $N = 17$ 与 $N = 31$ ；其余行 $d = 1$ ，与猜测一致但不足以检验）。因此在更大 N 的计算完成之前，应将其视为 R5 级别的推测，而非有充分证据支持的猜想。

5 GF(p) 上的普适结构 [R3]

5.1 所有素数下的 $N = 2$ 周期

我们将分析推广到一般有限域 $\text{GF}(p)$ 。二胎系统 M_2 呈现基于 p 模 5 余数的普适模式：

定理 5.1 (普适 $N = 2$ 周期模式). 设 M_2 是 $\text{GF}(p)$ 上的二胎耦合算子， $p \neq 5$ 为奇素数。周期 $P_2(p)$ 满足：

$$P_2(p) \mid \begin{cases} p-1 & \text{若 } p \equiv 1 \pmod{5} \\ p^2-1 & \text{若 } p \equiv 4 \pmod{5} \\ p^4-1 & \text{若 } p \equiv 2, 3 \pmod{5} \end{cases} \quad (9)$$

证明. E 的特征多项式为 $\Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ 。 Φ_5 在 $\text{GF}(p)$ 上的分解取决于 $\text{ord}_5(p)$ （每个不可约因子的次数等于 p 模 5 的乘法阶）：

- 若 $p \equiv 1 \pmod{5}$: $5 \mid p-1$ ，故 Φ_5 分裂为 4 个线性因子。 E 的特征值位于 $\text{GF}(p)$ 中，周期整除 $p-1$ 。
- 若 $p \equiv 4 \pmod{5}$: $5 \mid p+1$ ，故 Φ_5 分裂为 2 个不可约二次因子。特征值位于 $\text{GF}(p^2)$ 中，周期整除 p^2-1 。
- 若 $p \equiv 2, 3 \pmod{5}$: $\text{ord}_5(p) = 4$ ，故 Φ_5 不可约。特征值位于 $\text{GF}(p^4)$ 中，周期整除 p^4-1 。

对 M_2 ，特征值即 $E + I$ 与 $E - I$ 的特征值。同样的扩域适用，得到所述整除性。 $\square$

注 5.2 (特征 2 例外). 奇素数假设是必要的：当 $p = 2$ ($p \mid N$) 时，格算子 C_2 变为奇异， M_2 不可对角化，Jordan 因子使周期加倍： $P_2(2) = 2 \cdot 15 = 30 \nmid 2^4 - 1 = 15$ （参见 5.3 节的特征 2 分析）。

5.2 计算验证

p	$p \bmod 5$	情形	$P_2(p)$	上界
11	1	$p \equiv 1$	10	$p - 1 = 10$
31	1	$p \equiv 1$	30	$p - 1 = 30$
41	1	$p \equiv 1$	40	$p - 1 = 40$
61	1	$p \equiv 1$	60	$p - 1 = 60$
71	1	$p \equiv 1$	70	$p - 1 = 70$
19	4	$p \equiv 4$	180	$p^2 - 1 = 360$
29	4	$p \equiv 4$	280	$p^2 - 1 = 840$
59	4	$p \equiv 4$	580	$p^2 - 1 = 3480$
79	4	$p \equiv 4$	780	$p^2 - 1 = 6240$
89	4	$p \equiv 4$	880	$p^2 - 1 = 7920$
2	2	$p \equiv 2, 3$	30	$p^4 - 1 = 15$
3	3	$p \equiv 2, 3$	80	$p^4 - 1 = 80$
7	2	$p \equiv 2, 3$	480	$p^4 - 1 = 2400$
13	3	$p \equiv 2, 3$	560	$p^4 - 1 = 28560$
17	2	$p \equiv 2, 3$	2880	$p^4 - 1 = 83520$
23	3	$p \equiv 2, 3$	5280	$p^4 - 1 = 279840$

5.3 GF(3) 的特殊作用 [R1/R3]

我们区分两个层次的极大性，并证明一个范数论必要条件。

5.3.1 范数恒等式 [R1]

引理 5.3 ($\zeta_5 - 1$ 的范数). 设 ζ_5 为 5 次本原单位根, $\alpha = \zeta_5 - 1$ 。则

$$N_{\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q}}(\alpha) = \prod_{k=1}^4 (\zeta_5^k - 1) = \Phi_5(1) = 5. \quad (10)$$

证明. α 在 $\mathbb{Q}$ 上的共轭元为 $\zeta_5^k - 1$ ($k = 1, 2, 3, 4$)。由于 $\Phi_5(x) = \prod_{k=1}^4 (x - \zeta_5^k)$, 代入 $x = 1$ 得 $\Phi_5(1) = \prod_{k=1}^4 (1 - \zeta_5^k) = 5$ 。每个因子 $(\zeta_5^k - 1) = -(1 - \zeta_5^k)$, 且 $(-1)^4 = 1$, 故乘积为 5。□

命题 5.4 (本原性的必要条件). 设 $p \neq 5$ 为素数, Φ_5 在 $GF(p)$ 上不可约, $\bar{\alpha} \in GF(p^4)$ 为 $\alpha = \zeta_5 - 1$ 的像。若 $\bar{\alpha}$ 是 $GF(p^4)^*$ 的本原元 (即 $\text{ord}(\bar{\alpha}) = p^4 - 1$) , 则

$$\text{ord}_p(5) = p - 1, \quad (11)$$

即 5 是模 p 的本原根。

证明. 范数映射 $N : GF(p^4)^* \rightarrow GF(p)^*$ 满足 $N(\beta) = \beta^{1+p+p^2+p^3}$ 。由于 N 是满同态且 $\bar{\alpha}$ 生成 $GF(p^4)^*$, 像 $N(\bar{\alpha})$ 生成 $GF(p)^*$, 即 $\text{ord}(N(\bar{\alpha})) = p - 1$ 。由范数恒等式 (模 p 约化), $N(\bar{\alpha}) = 5 \in GF(p)$ 。故 $\text{ord}_p(5) = p - 1$ 。□

验证。 在 $p \equiv 2, 3 \pmod{5}$ 类中所有素数 $p \leq 113$ 内:

- 5 是模 p 的本原根, 对 $p \in \{2, 3, 7, 17, 23, 37, 43, 47, 53, 107, 113\}$ (11 个素数)。
- 必要条件**零反例**: 不存在 $\bar{\alpha}$ 为本原元而 5 不是模 p 本原根的素数。
- 然而该条件**不充分**: 11 个候选中 $p = 7, 17, 23, 37, 43, 47, 53, 107, 113$ 均有 $\text{ord}(\bar{\alpha}) < p^4 - 1$ 。

5.3.2 两个层次的极大性 [R3]

定理 5.5 (GF(3) 的极大性——精细分析, 已对 $p \leq 113$ 验证). 设 $p \neq 5$ 为素数, Φ_5 在 $GF(p)$ 上不可约, $p \leq 113$ 。

第 1 层 ($\bar{\alpha}$ 在 $GF(p^4)^*$ 中本原) : 成立当且仅当 $p \in \{2, 3\}$:

p	$p^4 - 1$	$\text{ord}(\bar{\alpha}) = \text{ord}(E - I)$	本原?
2	15	15	✓
3	80	80	✓
7	2400	480	× (间隙 = 5)
13	28560	560	× (间隙 = 51)
17	83520	2880	× (间隙 = 29)
23	279840	5280	× (间隙 = 53)

第 2 层 (M_2 达到周期 $p^4 - 1$) : 在素数 $p \leq 113$ 中唯一对 $p = 3$ 成立。

证明. 第 1 层对所有这样的 $p \leq 113$ 已计算验证。对第 2 层, 两个层次恰在 $p = 2$ 处分叉: 在 $GF(2)$ 上 $E - I = E + I$ (因 $-1 \equiv 1$) , 而对角化矩阵

$$P = \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}, \quad P^2 = 2I_8, \quad (12)$$

在 $GF(2)$ 上奇异 ($\det P = \pm 16 \equiv 0 \pmod{2}$)。故 M_2 在 $GF(2)$ 上不可对角化; 它获得一个使周期加倍的 Jordan 块: $\text{ord}(M_2) = 2 \cdot 15 = 30 > 15 = 2^4 - 1$ 。对所有奇 p , P 可逆, 且 $\text{ord}(M_2) = \text{lcm}(\text{ord}(E + I), \text{ord}(E - I)) = p^4 - 1$ 恰在 $p = 3$ 时成立; 最后这一断言对所有 $p \leq 113$ 已验证 (其是否对所有素数成立为开放问题 3) 。 $\square$

注 5.6. 对奇 p , 周期公式 $\text{ord}(M_2) = \text{lcm}(\text{ord}(E + I), \text{ord}(E - I))$ 已对 $p = 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23$ 验证。该精细分析通过特征 2 Jordan 结构解释了 $p = 2$ 处的唯一反常, 而非将其视为无法解释的反常。

注 5.7. $p = 3$ 为何是 $\bar{\alpha}$ 本原的唯一奇素数仍属开放。范数恒等式将搜索归约到 5 为本原根的素数 (该集合在所有素数中密度为 $\prod_q (1 - \frac{1}{q(q-1)}) \approx 0.374$, 条件于 Artin 猜想), 但在 ≤ 113 的 11 个此类候选中仅 $p = 3$ 成功——失败率 9/11。证明这样的素数是否有无穷多个, 或 $p = 3$ 是否真正孤立, 似乎需要超出初等代数数论的工具 (参见 7.3 节开放问题 3) 。

5.4 GF(p) 上一般 N: 紧密性结构 [R2/R3]

通用界通过阶函数推广到任意 $GF(p)$ 上的一般 N 。记 $\text{ord}_5(p)$ 为 p 模 5 的乘法阶 (支配 ζ_5 的域), $\text{ord}_N(p)$ 为 p 模 N 的阶 (支配 ζ_N 的域, 当 $p \nmid N$ 时有定义)。

命题 5.8 (一般上界). 若 $p \nmid N$, 则

$$P(N, p) \mid p^{\text{lcm}(\text{ord}_N(p), \text{ord}_5(p))} - 1. \quad (13)$$

若 $N = p^a \cdot m$ 且 $p \nmid m$, p -部分贡献额外因子 p^a :

$$P(N, p) \mid p^a \cdot (p^{\text{lcm}(\text{ord}_m(p), \text{ord}_5(p))} - 1). \quad (14)$$

草证. 当 $p \nmid N$: $\zeta_N \in GF(p^{\text{ord}_N(p)})$, $\zeta_5 \in GF(p^{\text{ord}_5(p)})$, 故 $E + \lambda_k I$ 的每个特征值 $\lambda_k + \zeta_5^j$ 落在 $GF(p^{\text{lcm}(\text{ord}_N(p), \text{ord}_5(p))})$ 中, 其乘法群具有所述阶。当 $p \mid N$: 分圆多项式 Φ_N 在特征 p 下退化 (因 $X^{p^a} - 1 = (X - 1)^{p^a}$), 将 ζ_N 分裂为 p -部分 (平凡) 与 p -素部分 ζ_m 。以 m 的倍数编号的 Fourier 模产生共振, 其 Jordan 贡献将周期乘以 p^a 。(精确的 Jordan 机制同定理 5.5 中 $p = 2$ 的分析。) $\square$

紧密性数据。该界经常被达到：

$\text{GF}(p)$	N	界 $p^{\text{lcm}} - 1$	实测	紧？
3	2, 4, 5, 8, 10	$3^4 - 1 = 80$	80	✓
3	3, 6, 9, 12	$3^4 - 1 = 80$	240, 240, 720, 240	× (因子 $3^{v_3(N)}$)
7	3, 4, 6, 8, 10	$7^4 - 1 = 2400$	2400	✓
7	2	$7^4 - 1 = 2400$	480	× (间隙 = 5)
7	5	$7^4 - 1 = 2400$	1200	× (间隙 = 2)

注 5.9. 得出两条结构性教训。(i) $\text{GF}(3)$ 的“唯一极大性”仅是二胎系统的性质：对更大的 N ， $\text{GF}(7)$ 同样达到 $p^4 - 1$ （如在 $N = 3, 4, 6, 8, 10$ ）。(ii) 在 $\text{GF}(3)$ 上，间隙模式完全由 3-adic 赋值解释——这正是定理 4.1 的耦合周期公式 $P(N) = 3^b(3^L - 1)$ ，现可视为 3-素基周期 $3^L - 1$ 乘以特征 3 Jordan 因子 3^b 。

6 $N = 62$ 情形：248 维与 E_8 数值巧合 [R2–R4]

6.1 维数对应 [R2]

$$N = 62 \Rightarrow \dim(M_{62}) = 4 \times 62 = 248 = \dim(E_8) \quad (15)$$

这是构造必然性（我们选取了 4 维胞与 62 个胞）。

6.2 Coxeter 数对应 [R2]

$$\varphi(62) = \varphi(2) \times \varphi(31) = 1 \times 30 = 30 = h(E_8) \quad (16)$$

其中 $h(E_8) = 30$ 是 E_8 的 Coxeter 数。

6.3 精确周期 [R2/R3]

对 $N = 62 = 2 \times 31$ ：

- $\text{ord}_{62}(3) = \text{lcm}(\text{ord}_2(3), \text{ord}_{31}(3)) = \text{lcm}(1, 30) = 30$
- $\text{ord}_5(3) = 4$ ，故 $\text{lcm}(\text{ord}_{62}(3), \text{ord}_5(3)) = \text{lcm}(30, 4) = 60$
- 一般上界（命题 4.8）： $P(62) \mid 3^{60} - 1$

我们在复合域 $\text{GF}(3^{60}) = \text{GF}(3^4)[u]/(\psi(u))$ 中计算了精确周期，其中 ψ 是 $2 \cos(2\pi/31)$ 在 $\text{GF}(3)$ 上的极小多项式（次数 15，已验证不可约）：

$$\psi(u) = u^{15} + u^{14} + u^{13} + 2u^{12} + 2u^9 + 2u^2 + u + 2 \quad (\text{系数在 } \text{GF}(3) \text{ 中}). \quad (17)$$

M_{62} 的 62 个特征值轨道约化为四个代表元，它们在 $\text{GF}(3^{60})^*$ 中的阶为：

轨道	特征值	$\text{GF}(3^{60})^*$ 中的阶	素因子分解
$k = 0$ ($\lambda = 2$)	$2 + \zeta_5$	80	$2^4 \cdot 5$
$k = 31$ ($\lambda = -2$)	$1 + \zeta_5$	40	$2^3 \cdot 5$
偶对 (15 轨道)	$u + \zeta_5$	$(3^{60} - 1)/7$	$2^4 \cdot 5^2 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 73 \cdot 271 \cdot 1181 \cdot 4561 \cdot 47763361$
奇对 (15 轨道)	$-u + \zeta_5$	$(3^{60} - 1)/2$	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 73 \cdot 271 \cdot 1181 \cdot 4561 \cdot 47763361$

偶轨道与奇轨道互补：偶轨道缺少因子 7 但带 2^4 ；奇轨道带 7 但仅有 2^3 。两者的最小公倍数恢复了整个群的阶。

定理 6.1 (M_{62} 的精确周期). $N = 62$ 耦合系统在 $GF(3)$ 上达到**最大可能周期**:

$$P(62) = 3^{60} - 1 = 42,391,158,275,216,203,514,294,433,200 \approx 4.24 \times 10^{28} \quad (18)$$

验证方式: (i) 如上在 $GF(3^{60})$ 中直接计算; (ii) 矩阵幂验证 $M_{62}^{3^{60}-1} = I$ 且对所有十二个素因子 q 有 $M_{62}^{(3^{60}-1)/q} \neq I$, 即

$$q \in \{2, 5, 7, 11, 13, 31, 61, 73, 271, 1181, 4561, 47763361\}. \quad (19)$$

验证可由配套脚本 `verify_62_orders.py` 复现 ($GF(3^4) \otimes GF(3^{15})$ 上的精确双变量算术, 无浮点)。

作为比较, 中间情形 $N = 31$ 有

$$P(31) = \frac{3^{60} - 1}{7} \approx 6.06 \times 10^{27}, \quad (20)$$

缺少 $N = 62$ 的奇对轨道所提供的因子 7。因此 $N = 31 \rightarrow N = 62$ 的过渡将周期从近极大补全为极大。

注 6.2 (与 $N = 2$ 的极大性平行). 这与二胞情形完全平行: $P(2) = 3^4 - 1 = |GF(3^4)^*|$ 是特征值域的整个群的阶; 对 $N = 62$, $P(62) = 3^{60} - 1 = |GF(3^{60})^*|$ 同样是整个群的阶。系统维数 248 与周期界 $3^{60} - 1$ 是这一极大机制的两大独立数值标志。

6.4 迹模式分析 [R3]

迹模式 $\text{tr}(M_{62}^k) \pmod{3}$ ($k = 1, \dots, 60$) 没有简单周期性, 在 $\{0, 1, 2\}$ 上近似均匀分布。

6.5 诚实度标注 [R4/R5]

论断	级别	说明
$248 = 248$	R2	构造必然性
$30 = 30$	R2	数论恒等式
$P(62) = 3^{60} - 1$	R2/R3	精确周期: $GF(3^{60})$ 中的结构性推导 + 直接矩阵验证
迹模式分析	R3	计算验证, 无结构性解释
$P(31) = (3^{60} - 1)/7$	R2/R3	具互补轨道结构的精确周期
E_8 联系	R4	启发式类比, 无已知同构
结构同构	R5	开放问题

核心问题: 是否存在从 $N = 62$ 系统到 E_8 的自然映射 (函子、表示或同构)? 这是一个需要新数学工具的**开放问题**。

7 讨论

7.1 与已有工作的关系

我们的结果位于有限域线性动力学的一条成熟研究脉络之内; 我们显式记录这种关系, 既包括承继之处, 也包括区别之处。

线性元胞自动机与周期分叉。 Barbé 与 von Haeseler [5] 分析了有限域上线性元胞自动机的轨道, 建立了轨道周期以特征 p 的因子倍数增长的普适分叉现象 (周期的 p -重分叉)。我们在 $P(N) = 3^b(3^L - 1)$ 中的 Jordan 因子 3^b 是这一现象的块矩阵类比: 扩大 N 的 3-adic 部分通过格算子的幂零 (Jordan) 结构将周期乘以 3 的幂, 而非通过轨道分裂。

有限域 CA 框架。 Vivaldi [6] 给出了有限域上元胞自动机的基础性分析, Martin-Odlyzko-Wolfram [7] 与 Jen [8] 通过有限域上的多项式与递归序列发展了加性元胞自动机的代数理论。

我们的算子 $M_N = I_N \otimes E + C_N \otimes I_4$ 是一个具有双尺度结构的块循环线性元胞自动机 ($\text{GF}(3)^4$ 上的胞算子 E 与环-Laplacian C_N 的张量积)。我们使用的离散 Fourier 对角化是该文献中的标准工具, 应用于一个具体的新对象; 不标准的是由此产生的周期算术及其对 N 的分圆数据的依赖。特别地, Vivaldi 的框架将一维周期线性 CA 的状态空间认同为 $\text{GF}(q^N)$, 其动力学为 $\text{GF}(q)$ -线性多项式映射; 我们的 M_N 正是这一范式的双尺度实例 ($\text{GF}(3)^4$ 上的胞算子与环算子 C_N 的张量积)。

Ducci 序列与分圆阶。 Breuer、Lötter 与 van der Merwe [9] 用单位根的乘法阶——特别是形如 $\zeta + \zeta^{-1}$ 的元素的阶——表达了 Ducci 型差分映射的周期, 其舞台为有限域与分圆环。我们的特征值 $\lambda_k = 2 \cos(2\pi k/N) = \zeta_N^k + \zeta_N^{-k}$ 将耦合周期公式置于同一分圆阶范式之中: 周期由 $\lambda_k + \zeta_5^j$ 在 $\text{GF}(3^L)^*$ 中的阶支配, 即单位根之和的乘法阶, 而今处于耦合设定之下, 并带有额外的特征 3 Jordan 因子。

时间动力学、不动点与 zeta 函数。 Byszewski 与 Cornelissen [10] 建立了多频带线性元胞自动机与有限域上代数向量群自同态之间的对应, 并由此推出第 n 次迭代不动点数的 p -adic 赋值公式、Artin–Mazur 动力学 zeta 函数的二分性, 以及周期轨道数的渐近公式。这是线性 CA 文献中对时间演化最系统的“过程级”处理。我们的分析与之互补: 我们固定一个具体的双尺度算子 M_N 并确定其精确通用周期, 而非结构性的不动点与轨道计数公式。在他们的框架内计算我们具体的 M_N 的不动点序列或 zeta 函数, 是自然的未来工作 (见下述开放问题 9)。

素数幂模下的周期增长。 Mendivil 与 Patterson [11] 证明了: 对 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 上素数幂模的线性元胞自动机, 当模从 p^k 过渡到 p^{k+1} 时, “大多数”轨道的周期长度增长 p 倍。我们的 Jordan 因子 3^b 是精确的特征 3 类比——系统规模的 3-adic 部分增大使周期乘以 3 的幂——并有两处强化: 该因子对通用轨道周期 (而非“大多数”轨道) 成立, 且增长被证明来自格算子的显式幂零指数 (定理 4.1 第 3 步)。

极大周期序列。 $\text{GF}(q)$ 上的极大周期线性递归序列是经典内容 [1]。我们的情形 $P(2) = 3^4 - 1$ 与 $P(62) = 3^{60} - 1$ 在特征值域 $\text{GF}(3^4)^*$ 与 $\text{GF}(3^{60})^*$ 层面展现出极大阶: 耦合系统在特征值一侧实现了本原元 (极大阶) 现象, 这正是这些情形在结构上与众不同的原因。

与标准有限域线性代数的区别:

- 单胞 E 算子: 标准结果 (Φ_5 的友矩阵)
- 多胞耦合 M_N : **新对象**——耦合周期公式是新的数学结果 (方法经典, 对象与周期算术是新的)
- $\text{GF}(p)$ 上的普适模式: **新观察**——对 $p \bmod 5$ 的依赖是新颖的结构性质
- $\text{GF}(3)$ 的极大性: **新发现**—— $p = 3$ 是唯一达到二胞极大周期的素数 (已检验至 $p = 113$), 其机制为范数恒等式 $N(\zeta_5 - 1) = 5$

增量贡献小结。 算子 $M_N = I_N \otimes E + C_N \otimes I_4$ 本身即是上述经典框架内的标准双尺度块循环构造。本文的增量贡献在于: (a) 5-光滑 N 的精确周期算术 $P(N) = 3^b(3^L - 1)$ 及其显式的特征 3 Jordan 机制; (b) $\text{GF}(p)$ 上普适的 $p \bmod 5$ 模式与经由范数恒等式 $N(\zeta_5 - 1) = 5$ 的 $\text{GF}(3)$ 极大性; 以及 (c) 精确的 $N = 62$ 计算 $P(62) = 3^{60} - 1$ 与完整的特征值-阶表。其余一切均为经典内容。

7.2 物理意义 (诚实度标注 R4/R5)

我们不声称本工作有直接物理应用。与 E_8 的数值巧合留待未来研究, 它可能是巧合, 也可能是更深数学结构的显现。

7.3 开放问题

1. 证明耦合周期猜想: 建立一般 N 的 $P(N)$ 精确公式。
2. 确定 $d(N)$: 找出猜想公式中分母的通用表达式。

3. **解释 GF(3) 的极大性：** 为什么 $p = 3$ 是 $\zeta_5 - 1$ 在 $\text{GF}(p^4)$ 中本原的唯一奇素数？范数恒等式（引理 5.3，命题 5.4）表明 5 必须是模 p 的本原根（在 Artin 猜想下密度 ≈ 0.374 ），但在 ≤ 113 的 11 个候选中仅 $p = 3$ 成功。这类素数中的成功率是否为正（有无穷多个），还是 $p = 3$ 是孤立的？这是针对特定代数整数 $\zeta_5 - 1$ 的 Artin 本原根猜想的有限域类比。
4. **结构同构问题：** M_{62} 是否与 E_8 的某个离散子群存在严格同构？
5. **耦合强度相变：** 是否存在临界耦合强度 c^* ，使系统从周期 5 的独立行为转变为涌现的集体复杂周期？
6. **其他耦合拓扑：** 线耦合、全连接耦合与二维格点耦合的动力学如何？
7. **GF(p) 上的一般 N：** $N = 2$ 的普适模式能否推广到 $\text{GF}(p)$ 上的一般 N ？（对 $\text{GF}(3)$ 已有部分回答：界 $p^{\text{lcm}(\text{ord}_N(p), \text{ord}_5(p))} - 1$ 的紧密性常见但不普适，参见 5.4 节。）
8. **极大周期 N 的分类：** 对哪些 N 有 $P(N) = 3^{\text{lcm}(\text{ord}_N(3), 4)} - 1$ ？已知：所有 5-光滑 N （定理 4.1，包括严格无穷族 $N = 2^e 3^b$ ），以及 $d = 1$ 的 $N = 7, 11, 13, 62$ （注 4.10）。非极大： $N = 17$ （ $d = 13124$ ）， $N = 31$ （ $d = 7$ ）。是什么刻画了 $N = 62$ 处所见产生极大性的互补轨道对？
9. **瞬态与时空结构：** 单胞的瞬态为零（注 2.4），且 5-光滑 N 的 M_N 精确通用周期已知；但非可逆变体（例如极小多项式可约的胞算子）的瞬态结构，以及耦合系统的时空图几何——秉承 [5] 的竖直周期分析与 [10] 的不动点/zeta 函数框架——仍未被研究。

8 结论

本文建立了有限域上多胞系统的**耦合周期公式**：

1. 对 $\text{GF}(3)$ 上的 $N = 2^a \times 3^b \times 5^c$ （单位耦合 $c = 1$ ），通用轨道周期为 $P(N) = 3^b \times (3^L - 1)$ ， $L = \text{lcm}(\text{ord}_{2^a}(3), \text{ord}_{5^c}(3), 4)$ ，在验证范围内精确（26/26 验证通过，定理 4.1）。
2. 我们发现了基于 $p \bmod 5$ 的二胞周期**普适模式**（定理 5.1）：
 - $p \equiv 1 \pmod{5}$ ：周期整除 $p - 1$
 - $p \equiv 4 \pmod{5}$ ：周期整除 $p^2 - 1$
 - $p \equiv 2, 3 \pmod{5}$ ：周期整除 $p^4 - 1$
3. $\text{GF}(3)$ 被区分为**唯一素域**（已检验至 $p = 113$ ），达到二胞极大周期 $p^4 - 1 = 80$ （定理 5.5）。我们证明了**范数恒等式** $N(\zeta_5 - 1) = 5$ （引理 5.3），由此得到 5 必为模 p 本原根的必要条件（命题 5.4，在 $p \leq 113$ 内零反例），并通过特征 2 Jordan 结构解决了 $p = 2$ 的反常。
4. 我们提出了针对一般 N 精确周期的**耦合周期猜想**。
5. 当 $N = 62$ 时，系统维数为 248——与 $\dim(E_8)$ 的数值巧合，按第 6.5 节归类为 R4，本文仅将其作为巧合陈述。精确周期为 $P(62) = 3^{60} - 1 \approx 4.24 \times 10^{28}$ ，即 $\text{GF}(3^{60})^*$ 中的**最大可能阶**——与二胞情形 $P(2) = 3^4 - 1 = 80$ 同属极大机制。

核心贡献：

1. 耦合周期公式（ $\text{GF}(3)$ 上 $N = 2^a \times 3^b \times 5^c$ ，精确形式 $P(N) = 3^b(3^L - 1)$ ， $L = \text{lcm}(\text{ord}_{2^a}(3), \text{ord}_{5^c}(3), 4)$ ）的结构性证明——在验证范围内对最终特征值-阶断言附有计算认证（单位耦合 $c = 1$ ；验证范围内精确，26/26 验证通过）

2. **严格无穷族**: 对所有 $b \geq 0, \varepsilon \in \{0, 1\}$ 有 $P(2^\varepsilon 3^b) = 80 \cdot 3^b$, 证明仅依赖单次有限计算 ($\text{GF}(3^4)$ 中 $\text{ord}(\zeta_5 - 1) = 80$, 经由 $(\zeta_5 - 1)^{40} = -1$ 与 $(\zeta_5 - 1)^{16} = \zeta_5^3$), 无需逐 N 验证
3. 发现基于 $p \bmod 5$ 的 $\text{GF}(p)$ 上普适 $N = 2$ 周期模式
4. 证明 $\text{GF}(3)$ 是唯一 (已检验至 $p = 113$) 达到二胞极大周期的素域, 包括范数恒等式 $N(\zeta_5 - 1) = 5$ 与 $p = 2$ 处的特征 2 Jordan 分析
5. **$N = 62$ 周期的精确计算**: $P(62) = 3^{60} - 1$ (极大), 并给出互补轨道结构 $P(31) = (3^{60} - 1)/7$ ——在 $\text{GF}(3^{60})$ 中结构性验证, 并对全部十二个素因子作直接矩阵幂验证
6. 提出针对一般 N 的耦合周期猜想

致谢

感谢匿名红队审稿人, 其严格质疑显著提升了本工作的数学严谨性与诚实度。

感谢 AI 助手集群——Kimi (月之暗面; 连接与整合)、DeepSeek (深层代数洞察)、通义千问 Qwen (追问与交叉验证), 其协作支持对结果的发现、计算认证与多轮对抗性评审至关重要。三值编码框架的哲学启发来自《道德经》第四十二章: “道生一, 一生二, 二生三, 三生万物”。

References

- [1] Lidl, R. & Niederreiter, H. (1997). *Finite Fields*. Cambridge University Press.
- [2] Chung, F. (1997). *Spectral Graph Theory*. AMS.
- [3] Humphreys, J. E. (1990). *Reflection Groups and Coxeter Groups*. Cambridge University Press.
- [4] Conway, J. H. et al. (1985). *Atlas of Finite Groups*. Oxford University Press.
- [5] Barbé, A. & von Haeseler, F. (2001). Periodic patterns in orbits of certain linear cellular automata. In *Discrete Models: Combinatorics, Computation, and Geometry* (DM-CCG 2001), DMTCS Proceedings AA, 79–94.
- [6] Vivaldi, F. (1994). Cellular automata and finite fields. *Physica D* 79, 115–131.
- [7] Martin, O., Odlyzko, A. & Wolfram, S. (1984). Algebraic properties of cellular automata. *Communications in Mathematical Physics* 93, 219–258.
- [8] Jen, E. (1988). Linear cellular automata and recurring sequences in finite fields. *Communications in Mathematical Physics* 119, 13–28.
- [9] Breuer, F., Lötter, E. & van der Merwe, A. B. (2007). Ducci sequences and cyclotomic polynomials. *Finite Fields and Their Applications* 13(2), 293–304.
- [10] Byszewski, J. & Cornelissen, G. (2022). Multiband linear cellular automata and endomorphisms of algebraic vector groups. Preprint arXiv:2211.02866; to appear in the Yuri Manin memorial volume, International Press.
- [11] Mendivil, F. & Patterson, D. (2012). Dynamics of finite linear cellular automata over $\mathbb{Z}_N$. *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 42(2), 695–709.