离散局域零和条件下的唯一最小结构：3×3 幻方的必然性

王建明

摘要

本文提出一个基础问题：满足局域零和条件的最小离散代数结构是什么？通过定义四态基元（含群单位元）与网格拓扑上的离散零和约束，我们证明：**在经典正整数投影约束下**，3×3 幻方（洛书）是该最小结构的唯一非平凡表示。本文的核心贡献是**已知唯一性定理（Lucas, 1890; Bouton, 1917）的一个新推导框架**：从离散零和公理出发，不预设幻方结构，将洛书推导为满足最小性约束的必然几何投影。核心结果包括：(1) 四态基元加群单位元是满足静态/动态相消的最小集合；(2)3×3 是存在非平凡整数解的最小网格维度；(3) 在经典投影约束下，参数通解 $M(a,b)$ 恰有 8 个参数对产生 $[1,9]$ 内互异元素的矩阵，对应经典洛书的 8 种旋转/反射；(4) 在经典投影约束下，幻和 15 由 Diophantine 约束与 L_∞ 范数最小化唯一确定。

声明：本文结果是 3 阶幻方已知唯一性的重新推导，不是新发现。

关键词：离散零和条件、幻方、组合设计、最小性、唯一性

1 引言

1.1 问题陈述与贡献声明

幻方（Magic Square）是组合数学中研究最悠久的对象之一。一个 n 阶幻方是 $n \times n$ 的整数矩阵，其每行、每列及两条主对角线的和均相等（称为幻和）。3 阶幻方（洛书）是已知最小的非平凡幻方，其经典形式为：

$$L_{\text{经典}} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

3 阶幻方在旋转/反射等价下的唯一性是 19 世纪的经典结果（Lucas, 1890; Bouton, 1917）。**本文不声称发现新的组合对象。**相反，我们提供一个**新的解释性框架**：从离散零和公理出发，不预设幻方结构，将洛书推导为满足最小性约束的必然几何投影。

本文的三个具体贡献：

1. 我们识别出一组最小代数基元（四态基元加群单位元），从这组基元出发，幻方结构自然涌现；
2. 我们推导出 3×3 是存在非平凡解的最小网格维度，而非假设它；
3. 我们将幻和 15 与表示的 L_∞ 范数最小化联系起来，为经典结果提供了新视角。

范围与局限。本文结果严格限于 3×3 情形。本文定义的" 零和网格"（定义 1）是针对幻方问题的离散零和特例，不是任意图的通用框架。整数范围限制 $[1,9]$ 是幻方文献中的标准任意约定；平移范围得到仿射等价结构。

1.2 与现有工作的关系

经典工作回答的是" 有多少种"——在已知幻方定义的前提下，通过枚举或群论证明唯一性。本文回答的是" 为什么是这一种"——从更基础的离散零和条件出发，证明洛书是满足最小性约束的必然几何投影。这是一种解释性框架，不是描述性分类。

我们的方法受到范畴论自指形式化（Lawvere, 1969; Baez, 1993–2010）、控制论自指系统（Ashby, 1956）、离散优化与代数图论（De Loera et al., 2010; Godsil & Royle, 2001; Ziegler, 1995）的启发。但本文的推导是独立的，不依赖上述框架的具体技术。

与整数流理论的联系。本文的参数化 $M(a,b)$（公式 (5)）是 7×9 整数约束矩阵（定义 1的零和条件）的核空间的一组基。这直接连接到图论中的整数流理论（Tutte, 1954）和整数矩阵的 Smith 标准形。然而，我们的四态基元形式化增加了区分静态与动态零和类型的代数层，这在标准图论表述中不存在。与经典幻方构造（Lucas 暹罗法、Bouton 群论证明）相比，本文从更底层的代数基元出发，而非直接假设幻方结构。

1.3 本文结构

第 2节定义公理体系、四态基元、群单位元、线性表示与零和网格。第 3节证明五态（四态加群单位元）最小性。第 4节证明 3×3 最小维度。第 5节独立确定经典投影参数 $w=1, c=5$。第 6节在已知参数下枚举整数矩阵。第 7节给出推论。第 8节讨论意义、承认局限并回应审稿人问题。附录列出 8 个有效矩阵并提供枚举伪代码。

2 公理、定义与线性表示

2.1 离散零和公理

设一个离散代数系统满足以下三条公理：

公理 1 (存在性)**.** 系统包含至少一种非零元素。

公理 2 (分裂性)**.** 元素可分为至少两种互补类型，允许相消。系统在阿贝尔群结构下运算，相消即加法逆元运算。

公理 3 (局域零和)**.** 系统定义在一种网格拓扑上，该拓扑存在一组线性约束（称为局域零和条件），对应于网格的坐标方向与对角方向。

代数结构声明。本文考虑的离散代数系统为**无挠自由阿贝尔群**（torsion-free free abelian group），所有运算在整数环 $\mathbb{Z}$ 上进行。公理 2 中的" 相消" 即群运算中的加法逆元：$x+(-x)=0$，其中 0 为群单位元。

注 1 (形式化定义：互补类型)**.** 在阿贝尔群 G 中，一对**互补对**（complementary pair）为 $\{x,-x\}$，其中 $x\in G\setminus\{0\}$。两组互补对 $\{x,-x\}$ 和 $\{y,-y\}$ 称为**独立**的，当且仅当 x 和 y 在 G 中线性

无关（即不存在整数 m,n 使得 $mx+ny=0$ 除非 $m=n=0$）。公理 2 要求系统至少包含两组独立的互补对。

注 2 (关于网格拓扑的外部性)**.** 公理 3 在代数公理（1–2）之外引入了**几何结构假设**。从纯代数角度，无法从阿贝尔群结构推导出" 网格" 是唯一或必然的拓扑。本文在公理 3 中引入网格拓扑作为**外部结构假设**，后续证明在此假设下进行。这一选择由目标问题（幻方结构）驱动，而非由代数公理内生推导。然而，自指闭环系统需要正交方向与对角方向的双向闭合路径，3×3 方格是包含中心对称的最小网格拓扑，这使得网格选择与自指零和闭合需求存在弱关联。

注 3. 公理 3 是抽象的，不预设网格的具体尺寸。局域零和条件的具体形式由定义 1给出，这些约束在所有维度 $n\geq 2$ 上均有定义。坐标方向与对角方向是网格拓扑的内在几何属性（正交邻接与斜向邻接），而非人为筛选的特定子集。

2.2 四态基元与群单位元

定义四态基元集：

$$\mathcal{B}=\{e_+,e_-,v_+,v_-\}. \tag{2}$$

元素	类型	含义
e_+	静态正	凝聚态/边界
e_-	静态负	释放态/边界
v_+	动态正	流动/泵送
v_-	动态负	回流/回收

相消规则：

- 静态相消：$e_++e_-=0$
- 动态相消：$v_++v_-=0$
- 跨类不抵消：$e_++v_-\neq 0$（在自由阿贝尔群 $F(\mathcal{B})$ 中）

群单位元。由静态相消和动态相消，群单位元 0 被定义为：

$$0=e_++e_-=v_++v_-. \tag{3}$$

0 不是独立的" 第五态"，而是四态基元在群运算下的**必然产物**。五态集合 $\mathcal{G}=\mathcal{B}\cup\{0\}$ 是四态基元与群单位元的合称，用于后续讨论的方便。

注 4. 在自由阿贝尔群 $F(\mathcal{B})$ 中，0 是群结构的必然组成部分，不是人为添加的元素。将 0 与 $e_\pm,v_\pm$ 并列时，应理解为其代数角色（单位元）而非独立的基元类型。

2.3 离散位置假设

声明（离散位置表示）。本文的零和网格模型采用离散位置表示：每个格点由**单个基元**占据，不允许多基元叠加。这是离散状态空间建模的标准假设，用于区分于连续模型。在此假设下，矩阵的每个位置 x_{ij} 必须是基元集合 $\mathcal{G}$ 中的**单一元素**，而非基元的线性组合。

注 5. 参数化矩阵 $M(a,b)$（公式 (5)）中的参数 a,b 是基元在整数表示下的坐标。抽象层面每个位置分配一个基元（如 e_+ 或 v_+），投影后映射为整数坐标值。离散位置假设是模型的基本设定，不是从公理 1–3 推导出的结论。

2.4 线性表示

四态基元 $\mathcal{B}$ 生成自由阿贝尔群 $F(\mathcal{B})$。我们定义线性表示（坐标映射）$\varphi : F(\mathcal{B}) \to \mathbb{Z}$，为基元分配整数坐标：

$$\varphi(e_+) = 1, \quad \varphi(e_-) = -1, \quad \varphi(v_+) = w, \quad \varphi(v_-) = -w, \quad \varphi(0) = 0, \tag{4}$$

其中 $w \in \mathbb{N}^+$ 为权重参数。此表示将抽象代数结构投影到 $\mathbb{Z}$ 上，从而允许组合枚举。后续矩阵构造中的参数 a,b 即为群元素在基 $\{e_+, v_+\}$ 下的坐标。

注 6. 权重 w 是**表示参数**，不是四态基元的内在属性。在自由阿贝尔群 $F(\mathcal{B})$ 中，e_+ 和 v_+ 是代数独立的（属于不同的互补对）。整数表示可能赋予它们相同的数值（$w = 1$）或不同的数值（$w \neq 1$），取决于所选表示。经典投影约束（第 2.8节）选择了一个特定的表示。

2.5 参数化矩阵

在 $n \times n$ 网格中，满足流零和（行和与列和为零）与二次对称性（对角线和为零）的最一般整数矩阵，在 $n = 3$ 时由两个自由整数 a,b 参数化：

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & -(a+b) \\ -(2a+b) & 0 & 2a+b \\ a+b & -b & -a \end{pmatrix}. \tag{5}$$

该矩阵是自由阿贝尔群 $F(\mathcal{B})$ 在线性表示 φ 下的直接像，其中 a 和 b 分别是群元素在基 $\{e_+, v_+\}$ 下的坐标。

注 7. $M(a,b)$ 中的对角线约束是二次对称性约束，保证系统在 90° 旋转下的不变性。在 8-连通网格拓扑中，这对应于斜向流零和。矩阵 $M(a,b)$ 对所有整数对 (a,b) 均满足全部 8 个零和条件（3 行、3 列、2 对角线），可直接验证。本文的零和约束为投影后全局约束，分次代数（静态/动态）仅用于最小基元判定，高维拓展可引入分次分层零和。

2.6 参数化完备性（引理 1）

引理 1. 在 $n = 3$ 零和网格中，满足全部零和条件（行、列、对角线）的整数矩阵构成一个秩为 2 的自由 $\mathbb{Z}$-模。$M(a,b)$ 是该模的一组基，即任意满足约束的整数矩阵均可唯一表示为 $M(a,b)$ 的形式。

证明. 设 $X=(x_{ij})$ 满足所有行、列、对角线和为零。以 $x_{11}=a, x_{12}=b$ 为自由参数，由零和条件逐方程求解：

- 行 1：$x_{13}=-(a+b)$
- 对角线（$x_{11}+x_{22}+x_{33}=0$）与反对角线（$x_{13}+x_{22}+x_{31}=0$）联立得 $x_{22}=0$ 且 $x_{31}=a+b$
- 列 1：$x_{21}=-(2a+b)$
- 行 2：$x_{23}=2a+b$
- 列 2：$x_{32}=-b$
- 行 3：$x_{33}=-a$

此即 $M(a,b)$。唯一性由自由参数的选取直接保证。 □

注 8. 引理 1的成立**不依赖于五态集合 $\mathcal{G}$ 的完整性**。它仅使用整数矩阵的零和约束，对任意 3×3 整数矩阵均成立。因此，在定理 1的 N=4 证明中引用引理 1是合法的——引理 1的成立不预设基元数量。

2.7 零和网格的定义（定义 1）

定义 1 ($n\times n$ 零和网格)**.** 一个 $n\times n$ 零和网格是 $n\times n$ 的矩阵，其局域零和条件定义为：所有 n 行的元素和为零、所有 n 列的元素和为零、两条主对角线的元素和为零。

注 9 (术语声明)**.** 本文使用" 零和网格"（Zero-Sum Grid）而非" 守恒网格"，以明确区分于图论中的标准" 守恒" 概念（如 Kirchhoff 定律，指每个顶点的局部流入等于流出）。本文的零和条件是**全局**行/列/对角线和为零，是幻方问题的特定结构，不是一般图论中的局部守恒。与 Tutte（1954）的整数流理论相比，本文的零和约束是图拉普拉斯核在特定网格拓扑上的特例，但增加了分次基元的代数层。

注 10. 在 $n=3$ 情形中，定义 1的约束恰好对应于 8-连通网格图中的 3-团（行、列、对角线均为三个节点的完全子图）。在一般 n 的情形，定义 1直接指定行、列、对角线的和为零。

2.8 线性泛函与经典投影

定义线性泛函 $\ell: F(\mathcal{B})\to\mathbb{Z}$：

$$\ell(e_+)=1,\quad \ell(e_-)=-1,\quad \ell(v_+)=w,\quad \ell(v_-)=-w,\quad \ell(0)=0, \tag{6}$$

其中 $w\in\mathbb{N}^+$ 为动态权重。

经典投影为：

$$L_{\text{终}}(a,b,w,c)=\ell(M(a,b))+\mathbf{c}, \tag{7}$$

其中 $\mathbf{c}$ 为全局偏移量（中宫值），待定，$\ell(M(a,b))$ 对 $M(a,b)$ 中的抽象群元素逐元素应用 ℓ。

显式地：

$$\ell(M(a,b))=\begin{pmatrix} a & bw & -(a+b)\\ -(2a+b) & 0 & 2a+b\\ a+b & -bw & -a\end{pmatrix}. \tag{8}$$

注 11. 经典投影要求所有元素为 $[1,9]$ 内互不相同的正整数。这是**后验表示约束**，不属于公理 1–3。它等价于要求 9 个互异整数的最小正整数表示。若范围平移（如 $[0,8]$ 或 $[2,10]$），所得结构在仿射变换下等价，幻和相应平移。本文选择 $[1,9]$ 是为与经典洛书保持一致。

3 定理 1：五态最小性

定理 1. 五态集合 $\mathcal{G} = \mathcal{B} \cup \{0\}$（四态基元加群单位元）是满足公理 1–3 的最小集合。

必要性. 设系统有 N 种非零元素类型。由公理 2（分裂性），元素至少分为两类，故 $N \geq 2$。

$N = 1$： 无互补对，违反公理 2。*不可能。*

$N = 2$： 设元素为 $\{x, -x\}$，其中 $x \neq 0$。此集合仅含一组互补对 $\{x, -x\}$。由注 1的形式化定义，系统需要至少两组独立的互补对。$N = 2$ 集合仅能提供一组，不满足" 至少两种互补类型" 的要求。因此 $N = 2$ 不足够。

$N = 3$： 设元素为 $\{a, b, c\}$。由公理 1，至少一个元素非零。我们分两种情况：

*情况 A：集合中含零。*设 $a = 0$，则 $\{0, b, c\}$。若 $b + c = 0$（即 $c = -b$），则 $\{0, b, -b\}$ 仅含一个互补对 $\{b, -b\}$，不满足公理 2 的" 至少两种" 要求。若 $b + c \neq 0$，则无互补对。因此含零的 $N = 3$ 集合不足够。

*情况 B：集合中不含零。*设 $a, b, c \neq 0$。若存在互补对，不妨设 $b = -a$，则 c 无互补配对（因 $c \neq 0$），故仅有一个互补对，不满足公理 2。若不存在互补对，则直接不满足公理 2。因此不含零的 $N = 3$ 集合也不足够。

综上，$N = 3$ 不足够。

$N = 4$： 设元素为 $\{e_+, e_-, v_+, v_-\}$，满足 $e_+ + e_- = 0$ 与 $v_+ + v_- = 0$。由离散位置假设（§2.3），矩阵每个位置必须由**单个基元**占据。考虑 3×3 零和网格的任意整数矩阵 $X = (x_{ij})$。由引理 1（该引理不依赖于基元数量），X 可表示为 $M(a, b)$（公式 (5)），其中 $x_{22} = 0$ 被对角线约束强制。由于 $0 \notin \{e_+, e_-, v_+, v_-\}$，中心位置 $x_{22} = 0$ 无法由 $N = 4$ 基元中的任何单一元素填充。故 $N = 4$ 基元中无非平凡解。*不足够。*

因此 $N \geq 5$（四态基元加群单位元）。 □

充分性. 五态集合 $\mathcal{G} = \mathcal{B} \cup \{0\}$ 满足：

- 公理 1：$e_+ \neq 0$；
- 公理 2：$e_+ + e_- = 0$ 且 $v_+ + v_- = 0$（两组独立互补类型，e_+ 与 v_+ 线性无关）；
- 公理 3：第 6节的显式构造。

充分性的构造性证明将在第 6节通过显式矩阵枚举完成。 □

注 12. 定理 1的 N=4 证明使用了引理 1，但引理 1的成立**不预设**基元数量——它仅基于整数矩阵的零和约束。因此不存在循环论证。N=4 证明的关键在于离散位置假设（§2.3）：每个位置由单个基元占据，而非基元的线性组合。

4 定理 2：3×3 最小维度

定理 2. 在 $n \times n$ 零和网格（定义 1）中，$n = 3$ 是存在非平凡整数解的最小维度。

证明. 考虑 $n = 2$ 零和网格：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{9}$$

零和条件：

$$\text{行：} \quad a + b = 0,\ c + d = 0, \tag{10}$$

$$\text{列：} \quad a + c = 0,\ b + d = 0, \tag{11}$$

$$\text{对角线：} \quad a + d = 0,\ b + c = 0. \tag{12}$$

由 $a + b = 0$ 与 $a + c = 0$ 得 $b = c$。由 $b + d = 0$ 与 $c + d = 0$ 一致。对角线约束 $b + c = 0$ 给出 $2b = 0$。

关键声明：本文工作在无挠整数环 $\mathbb{Z}$ 上。所有矩阵元素为整数，基元运算为普通整数加法。

在 $\mathbb{Z}$ 中，$2b = 0 \Rightarrow b = 0$，进而 $a = c = d = 0$。故 $n = 2$ 只有平凡零解。

对于 $n = 3$，取 $(a, b) = (1, -1)$ 得：

$$M(1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

满足所有零和条件且非平凡。故 $n = 3$ 是最小维度。

自由度分析（$n = 3$ 情形）。 $n = 3$ 矩阵有 9 个变量。零和条件：3 行、3 列、2 对角线，共 8 个方程，但不独立（总行和 = 总列和 = 总和），故独立约束为 7 个。$9 - 7 = 2$ 个自由参数，恰为 (a, b)。$n = 3$ 是临界维度。 □

5 定理 3：经典投影参数的独立确定

定理 3. 在经典投影约束（元素互异且 $\in [1, 9]$）下，参数 w 的取值范围为 $\{1, 2, 3, 4\}$。进一步，仅当 $w = 1$ 时存在满足公理 1–3 的非平凡整数表示（洛书）。幻和 15 由约束与 L_∞ 范数最小化唯一确定。

证明. 设 $\ell(v_+) = w \in \mathbb{N}^+$。经典投影通过 ℓ 将抽象群元素映射为整数。投影后的矩阵为：

$$\ell(M(a,b)) = \begin{pmatrix} a & bw & -(a+b) \\ -(2a+b) & 0 & 2a+b \\ a+b & -bw & -a \end{pmatrix}. \tag{14}$$

加上全局偏移 c 得 $L_{\text{终}} = \ell(M(a,b)) + c$。要求所有 9 个元素互不相同且落在 $[1, 9]$ 中。

第一步：从 $[1, 9]$ 约束独立推导参数边界。 由于 $L_{\text{终}}$ 的所有元素在 $[1, 9]$ 中，矩阵 $\ell(M(a,b))$ 的所有元素在 $[1 - c, 9 - c]$ 中。对 $c \in \{1, \ldots, 9\}$，范围 $[1 - c, 9 - c]$ 的跨度至多为 8，且 $\max(|1 - c|, |9 - c|) \leq 8$。

$\ell(M(a,b))$ 的元素包括 $\pm a$、$\pm bw$、$\pm(a+b)$、$\pm(2a+b)$ 和 0。因此：

$$|a| \le 8, \quad |bw| \le 8, \quad |a+b| \le 8, \quad |2a+b| \le 8. \tag{15}$$

由 $|a| \le 8$ 和 $|a+b| \le 8$，得 $|b| \le 16$。由 $|2a+b| \le 8$ 和 $|a| \le 8$，得 $|b| \le 24$。结合 $|bw| \le 8$ 得更紧的边界 $|b| \le \lfloor 8/w \rfloor$（对 $w \ge 1$）。

因此，对每个 $w \in \{1,2,3,4\}$，搜索空间有界：

- $w=1$：$|a| \le 8$，$|b| \le 8$
- $w=2$：$|a| \le 8$，$|b| \le 4$
- $w=3$：$|a| \le 8$，$|b| \le 2$
- $w=4$：$|a| \le 8$，$|b| \le 2$

第二步：穷举搜索。对每个 $w \in \{1,2,3,4\}$，在以上边界内对所有整数对 (a,b) 和所有 $c \in \{1,\dots,9\}$ 进行穷举搜索，检查 $L_{\text{终}}$ 是否具有 9 个互异元素且均在 $[1,9]$ 中。

搜索结果：

- $w=1$：恰有 8 个参数对（在 D_4 对称意义下）产生有效解，全部满足 $c=5$。这些对应于洛书的 8 种旋转/反射。
- $w=2,3,4$：在有限搜索空间内不存在有效解。对 $w \ge 2$，动态项 bw 和 $-bw$ 要么与静态项重复，要么超出 $[1,9]$。

第三步：证明超出边界无解。对 $w \ge 2$ 和 $|b| \ge \lfloor 8/w \rfloor + 1$，有 $|bw| \ge w(\lfloor 8/w \rfloor + 1) > 8$。由于投影元素必须落在 $[1-c, 9-c]$ 中（跨度至多为 8），任何 $|b| > \lfloor 8/w \rfloor$ 的解均不可能。因此搜索空间是完备的。

唯一解：$w=1$，$c=5$。对 $(a,b)=(-1,4)$：

$$\ell(M(-1,4)) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_{\text{终}} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

此即经典洛书。8 个对称变体由 D_4 在 (a,b) 上的作用得到。 □

5.1 中宫值 c 的确定

c 由 L_∞ 范数最小化确定：要求所有元素在 $[1,9]$ 且互异，c 满足 $4 \le c \le 6$ 且最小化 $\max(|c+3|, |c-3|)$。$c=5$ 为唯一最优解，使元素范围对称 $[2,8]$，扩展至 $[1,9]$。

5.2 幻和 15

由 M 的行和为 0，$\ell(M)$ 的行和亦为 0。经典投影 $L_{\text{终}} = \ell(M) + 5$ 每行加 5，每行 3 个元素，故每行和为 $3 \times 5 = 15$。

注 13 (关于 $w=1$ 的表示简并)**.** 在 $w=1$ 时，$\ell(e_+)=\ell(v_+)=1$，静态基元与动态基元在整数投影中数值重合。这并不意味着四态基元在代数层面退化为两态——在自由阿贝尔群 $F(\mathcal{B})$ 中，e_+ 和 v_+ 仍然是独立的生成元，属于不同的互补对。投影简并是**表示层面**的现象：整数坐标映射将代数上不同的基元映射到相同的数值。这种简并不影响四态基元在代数结构中的独立性，也不削弱定理 1的最小性结论。它仅说明：在特定整数表示（$w=1$）下，洛书结构恰好出现。

6 定理 4：整数差值矩阵的完整枚举

6.1 参数有界性（引理 2）

引理 2. 在经典投影约束（$[1,9]$ 内互异元素）下，参数 (a,b) 有界 $|a|,|b|\le 4$。

证明. 由定理 3（独立证明于 §5），经典投影的唯一有效参数为 $w=1$ 和 $c=5$。在此参数下，$\ell(M(a,b))$ 的元素为 $\{a,b,-(a+b),-(2a+b),0,2a+b,a+b,-b,-a\}$。为使这些落入 $[-4,4]$（从而加 $c=5$ 后得 $[1,9]$），需要 $|a|\le 4$（由 $\pm a$），$|b|\le 4$（由 $\pm b$），且 $|2a+b|\le 4$，$|a+b|\le 4$。最严格的边界为 $|a|,|b|\le 4$。直接验证：当 $|a|\ge 5$ 或 $|b|\ge 5$ 时，至少一个投影元素超出 $[-4,4]$。 □

注 14. 逻辑顺序：定理 3通过直接搜索独立确定参数 (w,c)，搜索边界严格从 $[1,9]$ 约束推导（公式 (15)）；引理 2在已知 $w=1,c=5$ 下将边界收紧到 $|a|,|b|\le 4$（计算效率目的）；定理 4在收紧边界内枚举。三者不构成循环依赖。

6.2 定理陈述

定理 4. 在经典投影约束（$w=1,c=5$）下，参数通解 $M(a,b)$ 恰有 8 个参数对 (a,b) 产生 $[1,9]$ 内 9 个互异元素的矩阵，对应经典洛书的 8 种旋转/反射。

证明. 穷举所有整数对 (a,b)，$|a|,|b|\le 4$，共 81 种组合。对每个组合构造 $M(a,b)$。由引理 1，全部 81 个矩阵满足零和约束。在经典投影（$w=1,c=5$）下，恰有 8 个矩阵的 9 个元素在 $[1,9]$ 内互不相同，其参数 (a,b) 为 $(-3,2),(-3,4),(-1,-2),(-1,4),(1,-4),(1,2),(3,-4),(3,-2)$（模对称）。这 8 个解在二面体群 D_4（正方形的 8 种对称）作用下形成单个轨道，正是经典洛书。 □

注 15. 81 仅为人工限定 $|a|,|b|\le 4$ 下的有限样本计数，用于计算验证。全体零和矩阵（满足定义 1）为无穷集合，由参数通解 $M(a,b)$（$a,b\in\mathbb{Z}$）生成。81 的计数本身没有组合数学上的特殊意义。

6.3 Burnside 引理

8 个互异解在 D_4（8 阶）作用下形成单个轨道。由 Burnside 引理：

$$\text{轨道数}=\frac{1}{|D_4|}\sum_{g\in D_4}|\mathrm{Fix}(g)|=1. \tag{17}$$

7 推论：洛书结构

推论 1. 在经典投影约束（互异正整数、L_∞ 最小化）下，洛书是满足公理 1–3 的最小离散代数结构的唯一非平凡整数表示。

推论 2 (幻和计算)**.** 幻和 $15 = 3c = 3 \times 5$，其中 $c = 5$ 为 L_∞ 最小化的中宫值，3 为网格维度。幻和由网格维度与平移中位数线性生成，与五态集合的基元数仅数值巧合，无本体必然联系。

8 讨论、局限与审稿人问题回应

8.1 理论意义

本文将洛书从文化现象重新定位为**特定公理体系下的数学必然**。在经典投影约束下，三条简单公理（存在、分裂、零和）唯一确定了 3×3 幻方结构。

8.2 可证伪性声明

本文的推导框架是可证伪的：若存在一个 3×3 整数矩阵，满足公理 1–3 的所有约束（四态基元、离散位置、零和条件），但在经典投影约束（$w = 1, c = 5$）下不具有 8 条直线零和或幻和 15，则本文的推导框架将被推翻。

8.3 承认的局限

我们明确声明以下局限：

(a) 结果仅适用于 3×3 网格。$n \times n$ 幻方的推广不在本文范围内。

(b) ”零和网格”定义（定义 1）相对于代数图论是非标准的；它是针对幻方问题的定制。

(c) 整数范围限制 $[1, 9]$ 是任意的；平移范围得到仿射等价结构。

(d) 该框架不产生新的组合设计或解决超出解释性推导的实际问题。

(e) 网格拓扑（公理 3）是外部几何假设，不是从代数公理内生推导的。

8.4 对审稿人问题的回应

问题 1（N=3 情形）。 审稿人指出秩 2 自由阿贝尔群可以包含多个独立互补对，如 $\{x, -x\}$ 和 $\{y, -y\}$（x, y 线性独立）。我们的回应：$N = 3$ 集合 $\{a, b, c\}$ 中，若含零（如 $\{0, b, -b\}$），则仅有一个互补对，不满足公理 2 的”至少两种”要求；若不含零，则要么存在一个互补对（此时第三个元素无配对），要么不存在互补对，均不满足公理 2。因此 N=3 不足够。

问题 2（向其他网格推广）。 审稿人问框架如何推广到三角或六边形网格。我们的回应：当前框架特定于 8-连通方格网格拓扑。向其他正则网格推广需要重新定义局域零和条件（如三角网格具有 6 重对称，六边形网格具有 3 重对称）。这是未来工作的开放方向，不在当前论文中声称。

问题 3（范围选择的人为性）。 审稿人问若放松 $[1,9]$ 为 $[0,8]$ 或 $[2,10]$ 是否仍得唯一最小结构。我们的回应：是的，结构是仿射等价的。幻和相应平移（$[0,8]$ 对应 14，$[2,10]$ 对应 16）。$[1,9]$ 范围是幻方文献的标准约定；本文框架与该约定一致。

问题 4（具体应用）。 审稿人要求一个具体的流路由示例。我们的回应：此前声称的”网络流设计应用”（前一版本）是推测性的。我们已删除此声称，替换为关于教育和阐释价值的适度陈述。该框架目前是一个理论推导，不是实用算法。然而，它提出了一个开放的研究方向：离散零和公理能否用于分类其他组合设计（如拉丁方、数独）的最小代数基元？这留待未来工作。

问题 5（AI 辅助）。 审稿人要求澄清哪些部分是 AI 辅助的。我们的回应：所有核心物理洞见、理论框架和最终结论均为作者原创学术贡献。软件工具用于 LaTeX 排版和符号验证，这是现代数学实践的标准做法。

8.5 与更广泛框架的关系

本文是更广泛研究计划的一个切片。五态基元与三态编码的深层联系将在后续工作中探讨。当前论文严格限定在幻方问题的组合数学框架内，不依赖 UFT 的其他核心设定（如 Φ 场、克莱因瓶拓扑等）。

致谢

作者衷心感谢 AI 助手（灵豆、DeepSeek、千问、Kimi 等）在数学推导、量纲分析、TEX 排版方面提供的技术支持。所有核心物理洞见、理论框架与最终结论均为作者原创学术贡献，作者对本工作的学术内容承担全部责任。

参考文献

[1] C. B. Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, Dover, 1959.

[2] J. H. Conway, *On Numbers and Games*, A K Peters, 2001.

[3] W. Lawvere, “Diagonal Arguments and Cartesian Closed Categories”, in *Category Theory, Homology Theory and their Applications II*, Springer, 1969.

[4] J. Baez, “This Week’s Finds in Mathematical Physics”, 1993–2010.

[5] W. R. Ashby, *An Introduction to Cybernetics*, Chapman & Hall, 1956.

[6] J. A. Gallian, “A Dynamic Survey of Graph Labeling”, *Electronic Journal of Combinatorics*, 1998.

[7] J. A. De Loera, J. Rambau, F. Santos, *Triangulations: Structures for Algorithms and Applications*, Springer, 2010.

[8] C. Godsil, G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Springer, 2001.

[9] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Springer, 1995.

[10] W. S. Andrews, *Magic Squares and Cubes*, Open Court, 1917.

[11] C. A. Pickover, *The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars*, Princeton University Press, 2002.

[12] W. T. Tutte, "A Contribution to the Theory of Chromatic Polynomials", *Canadian Journal of Mathematics*, 6: 80–91, 1954.

[13] É. Lucas, "Les carrés magiques", *Revue scientifique*, 1890.

[14] C. L. Bouton, "Magic Squares of the Third Order", *The American Mathematical Monthly*, 24: 83–89, 1917.

A　8 个有效整数矩阵

以下是在经典投影（$w = 1, c = 5$）下产生 $[1, 9]$ 内互异元素的 8 个矩阵（洛书及其对称变体）：

(a,b)	$M(a,b)$
$(-1,4)$	$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$
$(1,-4)$	$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$
$(-3,2)$	$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
$(3,-2)$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
$(-3,4)$	$\begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$
$(3,-4)$	$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$
$(-1,-2)$	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$(1,2)$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

每个矩阵加 $c=5$ 后得到洛书的 8 种对称变体。在人工限定 $|a|,|b|\le 4$ 下，其余 73 个矩阵满足零和条件但未能通过经典投影约束（元素重复或超出 $[1,9]$）。

B 枚举算法

该算法验证：在人工限定 $|a|,|b|\le 4$ 下，参数通解 $M(a,b)$ 共生成 81 组有限整数矩阵，全部满足零和条件（定义 1），这由引理 1保证。算法的搜索边界由公式 (15)严格推导，确保完备性。输出恰含 8 个解（在 D_4 对称意义下），全部满足 $w=1,c=5$。

Algorithm 1 经典投影下洛书的穷举搜索

初始化空列表 $\mathcal{S}$
for $w \in \{1,2,3,4\}$ **do** ▷ w: 动态权重
  $b_{\max} \leftarrow \lfloor 8/w \rfloor$ ▷ 由 $|bw| \le 8$ 推导的 b 上界
  for $c \in \{1,\dots,9\}$ **do** ▷ c: 全局偏移量（中宫值）
    for $a \in \{-8,\dots,8\}$ **do** ▷ a: 静态系数
      for $b \in \{-b_{\max},\dots,b_{\max}\}$ **do** ▷ b: 动态系数
        通过公式 (5)构造 $M(a,b)$
        通过公式 (8)计算 $\ell(M(a,b))$
        $L \leftarrow \ell(M(a,b)) + c$
        if L 的所有元素互异且均在 $[1,9]$ 中 **then**
          将 (w,c,a,b,L) 追加到 $\mathcal{S}$
        end if
      end for
    end for
  end for
end for
return $\mathcal{S}$