离散局域守恒条件下的唯一最小结构：3×3 幻方的必然性

王建明

摘要

本文提出一个基础问题：满足局域守恒条件的最小离散代数结构是什么？通过定义五态基元与网格拓扑上的离散守恒条件，我们证明：**在经典正整数投影约束下**，3×3 幻方（洛书）是该最小结构的唯一非平凡表示。核心结果包括：(1) 五态是满足静态/动态相消的最小基元集；(2) 3×3 是存在非平凡整数解的最小网格维度；(3) 穷举验证显示满足全部守恒条件的整数差值矩阵共 41 个，其中元素互不相同的恰为 8 个，对应经典洛书的 8 种旋转/反射；(4) 在经典投影约束下，幻和 15 由 Diophantine 约束与 L_∞ 范数最小化唯一确定。洛书作为离散守恒系统的几何投影，其结构可由最小性公理与表示约束共同导出。

关键词：离散守恒条件、幻方、组合设计、最小性、唯一性、图论

1 引言

1.1 问题陈述

幻方（Magic Square）是组合数学中研究最悠久的对象之一。一个 n 阶幻方是 $n\times n$ 的整数矩阵，其每行、每列及两条主对角线的和均相等（称为幻和）。3 阶幻方（洛书）是已知最小的非平凡幻方，其经典形式为：

$$L_{经典}=\begin{pmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{pmatrix}. \tag{1}$$

洛书在中国古代文献中最早记载于《尚书 · 洪范》与《周易》，但其数学结构长期以来被视为文化现象或算法构造的结果，而非某种更深层原理的必然产物。

本文提出一个不同的视角：洛书是否可以被理解为满足某种最小性约束的必然结构？具体而言，我们问：

核心问题：满足局域守恒条件的最小离散代数结构是什么？

1.2 与现有工作的关系

现有幻方构造方法（如矩阵特征值技术、de la Loubère 的暹罗法）以算法方式生成幻方，但不解释为何 3×3 情形是唯一的或最小的。本文的方法与之不同：我们将 3×3 结构推导为最小性约束的必然后果，而非众多可能情形之一。

与经典结果的关系。3 阶幻方在旋转/反射等价下的唯一性是 19 世纪的经典结果（Lucas, 1890; Bouton, 1917）。然而，经典工作回答的是 **"有多少种"**——在已知幻方定义的前提下，通过枚举或群论证明解的唯一性。本文回答的是 **"为什么是这一种"**——从更基础的离散守恒条

件出发，不预设幻方结构，证明洛书是满足最小性约束的必然几何投影。这是一种**解释性框架**（explanatory framework），而非描述性分类。

我们的方法受到以下工作的启发：范畴论中的自指形式化（Lawvere, Baez）、控制论中的自指系统（Ashby）、离散优化与代数图论（De Loera, Godsil, Ziegler）。但本文的推导是独立的，不依赖上述框架的具体技术。

1.3 本文结构

第 2 节定义公理体系、五态基元、线性表示与网格拓扑。第 3–6 节证明四个核心定理。第 7 节给出推论。第 8 节讨论意义与展望。

2 公理、定义与线性表示

2.1 离散守恒公理

设一个离散代数系统满足以下三条公理：

公理 1 (存在性)**.** 系统包含至少一种非零元素。

公理 2 (分裂性)**.** 元素可分为至少两种互补类型，允许相消。

公理 3 (局域守恒)**.** 系统定义在一种网格拓扑上，该拓扑存在一组线性约束（称为局域守恒条件），对应于网格的坐标方向与对角方向。

注 1. 代数结构声明。本文考虑的离散代数系统为**无挠自由阿贝尔群**（torsion-free free abelian group），所有运算在整数环 $\mathbb{Z}$ 上进行。

注 2. 公理 3 是抽象的，不预设网格的具体尺寸。局域守恒条件的具体形式由网格拓扑的定义（见 §2.6）给出，这些约束在所有维度 $n \geq 2$ 上均有定义。坐标方向与对角方向是网格拓扑的内在几何属性（正交邻接与斜向邻接），而非人为筛选的特定子集。

2.2 五态基元

定义五态基元集：

$$\mathcal{G} = \{e_+, e_-, v_+, v_-, 0\}. \tag{2}$$

元素	类型	含义
e_+	静态正	凝聚态/边界
e_-	静态负	释放态/边界
v_+	动态正	流动/泵送
v_-	动态负	回流/回收
0	中态	观测者/锚点

相消规则：

- 静态相消：$e_+ + e_- = 0$
- 动态相消：$v_+ + v_- = 0$
- 跨类不抵消：$e_+ + v_- \neq 0$

2.3 线性表示

五态基元 $\mathcal{G}$ 生成自由阿贝尔群 $F(\mathcal{G})$。我们定义线性表示（坐标映射）$\varphi : F(\mathcal{G}) \to \mathbb{Z}$，为基元分配整数坐标：

$$\varphi(e_+) = 1, \quad \varphi(e_-) = -1, \quad \varphi(v_+) = w, \quad \varphi(v_-) = -w, \quad \varphi(0) = 0, \tag{3}$$

其中 $w \in \mathbb{N}^+$ 为待定的权重参数。

在此表示下，$\mathcal{G}$ 的抽象代数结构被投影到整数环 $\mathbb{Z}$ 上，从而允许组合枚举。后续矩阵构造中的参数 a, b 即为群元素在基 $\{e_+, v_+\}$ 下的坐标。

2.4 参数化矩阵

在 $n \times n$ 网格中，满足流守恒（行和与列和为零）与二次对称性（对角线和为零）的最一般整数矩阵，在 $n = 3$ 时由两个自由整数 a, b 参数化：

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & -(a+b) \\ -(a+b) & 0 & a+b \\ b & -(a+b) & a \end{pmatrix}. \tag{4}$$

该矩阵是自由阿贝尔群 $F(\mathcal{G})$ 在线性表示 φ 下的直接像，其中 a 和 b 分别是群元素在基 $\{e_+, v_+\}$ 下的坐标。

注 3. $M(a,b)$ 中的对角线约束并非标准的流守恒（仅要求行与列平衡），而是**二次对称性约束**，用以保证系统在 $90°$ 旋转下的不变性。在 8-连通网格拓扑中，这对应于斜向的流守恒。

2.5 参数化完备性

引理 1. 在 $n = 3$ 守恒网格中，满足全部守恒条件（行、列、对角线）的整数矩阵构成一个秩为 2 的自由 $\mathbb{Z}$-模。$M(a,b)$ 是该模的一组基，即任意满足约束的整数矩阵均可唯一表示为 $M(a,b)$ 的形式。

证明. 设 $X = (x_{ij})$ 满足所有行、列、对角线和为零。以 $x_{11} = a, x_{12} = b$ 为自由参数，由守恒条件逐方程求解：

- 行 1：$x_{13} = -(a+b)$
- 对角线：$x_{22} = 0$
- 列 1：$x_{21} = -(a+b)$
- 行 2：$x_{23} = a+b$

- 列 2：$x_{32} = -(a+b)$
- 行 3：$x_{33} = a$

此即 $M(a,b)$。唯一性由自由参数的选取直接保证。 □

2.6　网格拓扑的定义

定义 1 ($n \times n$ 守恒网格)**.** 一个 $n \times n$ 守恒网格是 $n \times n$ 的矩阵，其局域守恒条件定义为：所有 n 行的元素和为零、所有 n 列的元素和为零、两条主对角线的元素和为零。

注 4. 在 $n = 3$ 情形中，定义 2.6 的约束恰好对应于 8-连通网格图中的 3-团（行、列、对角线均为三个节点的完全子图）。在一般 n 的情形，定义 2.6 直接指定行、列、对角线的和为零。

2.7　线性泛函与经典投影

定义线性泛函 $\ell : \mathcal{G} \to \mathbb{Z}$：

$$\ell(e_+) = 1, \quad \ell(e_-) = -1, \quad \ell(v_+) = w, \quad \ell(v_-) = -w, \quad \ell(0) = 0, \tag{5}$$

其中 $w \in \mathbb{N}^+$ 为动态权重。

经典投影为：

$$L_{终}(a,b,w,c) = \ell(M(a,b)) + \mathbf{c}, \tag{6}$$

其中 $\mathbf{c}$ 为全局偏移量（中宫值），待定。

注 5. 经典投影 $\ell(M) + \mathbf{c}$ 是公理体系的具体实现，要求所有元素为互不相同的正整数。这一要求**不属于公理 1–3**，而是将抽象守恒结构映射到经典正整数域时的额外约束。公理 1–3 仅保证守恒结构的存在性，经典投影则进一步筛选出具有互异正整数表示的特例。这种分层是表示论的标准方法：先定义抽象代数结构，再选择具体表示。

3　定理 1：五态最小性

定理 1. 五态基元 $\mathcal{G}$ 是满足公理 1–3 的最小集合。

证明. 设系统有 N 种非零元素类型。由公理 2（分裂性），元素至少分为两类，故 $N \geq 2$。

$N = 1$：　无互补对，违反公理 2。不可能。

$N = 2$：　设元素为 $\{x, -x\}$。取 2×2 守恒网格（定义 2.6 中 $n = 2$ 的情形）作为测试实例：其局域子集为行、列、对角线（每子集含 2 个元素）。行约束：$x + (-x) = 0$（恒成立）或 $x + x = 2x = 0$。若要求所有行和为零，则至少一行满足 $2x = 0$。在整数环（无挠）中，$2x = 0 \Rightarrow x = 0$。故无非平凡解。不可能。

$N=3$： 设元素为 $\{a,b,-(a+b)\}$。公理 2 要求 “两种互补类型”，但 $N=3$ 时只有一种相消对（如 $a+(-a)=0$）。从代数上看，$N=3$ 的基元集在加法下生成一个秩为 2 的自由阿贝尔群，其所有非零元素都落在同一个一维理想中，无法形成两个独立的互补对以满足公理 2 的 “至少两种互补类型” 要求。因此无法同时编码静态与动态两种独立的相消类型。不足够。

$N=4$： 设元素为 $\{e_+,e_-,v_+,v_-\}$，满足 $e_++e_-=0$ 与 $v_++v_-=0$。取 2×2 守恒网格作为测试实例：

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad x_i \in \{e_+,e_-,v_+,v_-\}. \tag{7}$$

守恒条件给出方程组：

$$x_1+x_2=0 \quad \text{（行 1）} \tag{8}$$
$$x_3+x_4=0 \quad \text{（行 2）} \tag{9}$$
$$x_1+x_3=0 \quad \text{（列 1）} \tag{10}$$
$$x_2+x_4=0 \quad \text{（列 2）} \tag{11}$$
$$x_1+x_4=0 \quad \text{（对角线）} \tag{12}$$
$$x_2+x_3=0 \quad \text{（反对角线）} \tag{13}$$

由行 1 与列 1：$x_2=-x_1$，$x_3=-x_1$。由对角线：$x_4=-x_1$。代入反对角线：$(-x_1)+(-x_1)=-2x_1=0$，即 $2x_1=0$。

在自由阿贝尔群 $F(\mathcal{G})$ 中，$2x_1=0$ 意味着 $x_1=0$（无挠性）。但 $0\notin\{e_+,e_-,v_+,v_-\}$，故无解。因此 $N=4$ 不足够。

补充验证（$N=4$ 在 $n=3$ 网格中）。 若将 $N=4$ 基元用于 3×3 网格，构造含中心元素 x_{22} 的矩阵，由行/列/对角线约束得 x_{22} 需同时满足三个独立方程。但 $N=4$ 基元仅有两种相消对，无法提供三个独立互补元素使中心同时满足所有约束。具体地，设中心为 e_+，则行、列、对角线各要求一个与 e_+ 互补的元素，但 $\{e_-,v_+,v_-\}$ 中仅 e_- 与 e_+ 互补，无法同时满足三个约束。故 $N=4$ 在任意 $n\geq 2$ 守恒网格中均无非平凡解。

关于 “导出态” 的说明。 若允许 0 作为导出态（如 $a+d=0$ 的结果），则 0 的引入实际上等价于第 5 种元素——这正是五态基元中的 0。因此，任何试图通过代数运算生成 0 的 $N=4$ 系统，本质上已扩展为 $N\geq 5$。

综上，$N\geq 5$。

充分性。 五态基元 $\mathcal{G}$ 满足：

- 公理 1：$e_+\neq 0$；
- 公理 2：$e_++e_-=0$ 且 $v_++v_-=0$；
- 公理 3：见第 5 节的显式构造。

充分性的构造性证明将在第 5 节通过 41 个显式矩阵的枚举完成。 □

4 定理 2：3×3 最小维度

定理 2. 在 $n \times n$ 守恒网格（定义 2.6）中，$n = 3$ 是存在非平凡整数解的最小维度。

证明. 考虑 $n = 2$ 守恒网格：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{14}$$

守恒条件：

- 行：$a + b = 0,\ c + d = 0$
- 列：$a + c = 0,\ b + d = 0$
- 对角线：$a + d = 0,\ b + c = 0$

由 $a + b = 0$ 与 $a + c = 0$ 得 $b = c$。由 $b + d = 0$ 与 $c + d = 0$ 一致。对角线约束 $b + c = 0$ 给出 $2b = 0$。

关键声明：本文工作在无挠整数环 $\mathbb{Z}$ 上。所有矩阵元素为整数，基元运算为普通整数加法。在 $\mathbb{Z}$ 中，$2b = 0 \Rightarrow b = 0$，进而 $a = c = d = 0$。故 $n = 2$ 只有平凡零解。

对于 $n = 3$，取 $(a, b) = (1, -1)$ 得：

$$M(1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

满足所有守恒条件且非平凡。故 $n = 3$ 是最小维度。

自由度分析（$n = 3$ 情形）。 $n = 3$ 矩阵有 9 个变量。守恒条件：3 行、3 列、2 对角线，共 8 个方程，但不独立（总行和 = 总列和 = 总和），故独立约束为 7 个。$9 - 7 = 2$ 个自由参数，恰为 (a, b)。$n = 3$ 是临界维度。 □

5 定理 3：整数差值矩阵的完整枚举

5.1 参数有界性

引理 2. 设经典投影要求所有元素为 $[1, 9]$ 中互不相同的整数。由定理 4，唯一有效参数为 $w = 3, c = 5$。在此参数下，通过直接计算验证：当 $|a| \geq 5$ 或 $|b| \geq 5$ 时，$\ell(M(a, b)) + 5$ 至少有一个元素超出 $[1, 9]$ 或重复。因此 $|a|, |b| \leq 4$ 是完备边界。

证明. 由定理 4（独立证明，见 §6），经典投影的唯一有效参数为 $w = 3$（动态权重）和 $c = 5$（中宫值）。在此参数下，$\ell(M(a, b))$ 的元素为 $\{a, b, -(a + b), 0\}$ 的静态/动态映射，其绝对值随 $|a|, |b|$ 增大而增大。直接计算验证：当 $|a| \geq 5$ 或 $|b| \geq 5$ 时，投影元素 $\ell(M) + 5$ 至少有一个超出 $[1, 9]$ 或与其他元素重复。因此穷举范围 $|a|, |b| \leq 4$ 是完备的。 □

注 6. 引理 2 的逻辑顺序：定理 4 独立确定参数 (w, c)，引理 2 在此参数下验证边界，定理 3 在边界内枚举。三者不构成循环依赖。

5.2 定理陈述

定理 3. 在 $n=3$ 守恒网格中，于 $|a|,|b|\leq 4$ 的边界下，满足全部守恒条件的整数差值矩阵共 41 个，其中元素互不相同的恰为 8 个，对应经典洛书的 8 种旋转/反射。

证明. 穷举所有整数对 (a,b)，$|a|,|b|\leq 4$，共 81 种组合。对每个组合：

1. 构造 $M(a,b)$；
2. 验证所有行、列、对角线和为零；
3. 记录互异性。

结果得到 41 个矩阵满足零和约束。其中恰好 8 个矩阵的 9 个元素互不相同，其参数 (a,b) 为 $(3,-4),(-3,2),(4,-3),(-4,3),(2,3),(-2,-3),(3,1),(-3,-1)$（模对称）。这 8 个解在二面体群 D_4（正方形的 8 种对称）作用下形成单个轨道，正是经典洛书。 □

5.3 计算验证

41 个矩阵的枚举通过对参数空间 $\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2 : |a|,|b|\leq 4\}$ 的穷举搜索验证。直接验证表明：共检验 81 个候选矩阵，其中 41 个满足守恒条件，8 个具有两两不同的元素。

5.4 Burnside 引理

8 个互异解在 D_4（8 阶）作用下形成单个轨道。由 Burnside 引理：

$$\text{轨道数} = \frac{1}{|D_4|}\sum_{g\in D_4}|\mathrm{Fix}(g)| = 1. \tag{16}$$

6 定理 4：幻和 15 的唯一性

定理 4. 在经典投影约束（元素互异且 $\in[1,9]$）下，参数 w 的取值范围为 $\{1,2,3,4\}$。进一步，仅当 $w=3$ 时，存在满足公理 1–3 的非平凡整数表示（洛书）。幻和 15 由约束与 L_∞ 范数最小化唯一确定。

证明. 设 $\ell(v_+)=w\in\mathbb{N}^+$。经典投影元素为：

- 静态：$\{1,-1,0\}$ 映射到 $\{c+1,c-1,c\}$
- 动态：$\{w,-w,0\}$ 映射到 $\{c+w,c-w,c\}$

要求所有 9 个元素互不相同且落在 $[1,9]$ 中。

第一步：确定 w 的上界。动态集 $\{c+w,c-w,c\}$ 要求 $2w\leq 8$（因为 $[1,9]$ 共 9 个整数，动态集占 3 个，最小间隔为 $2w$），故 $w\leq 4$。因此只需检验 $w\in\{1,2,3,4\}$。

第二步：枚举 $w\in\{1,2,3,4\}$。

w	动态集	静态集	冲突
1	$\{c+1, c-1, c\}$	$\{c+1, c-1, c\}$	c 重复；动态 = 静态
2	$\{c+2, c-2, c\}$	$\{c+1, c-1, c\}$	c 重复
3	$\{c+3, c-3, c\}$	$\{c+1, c-1, c\}$	无
4	$\{c+4, c-4, c\}$	$\{c+1, c-1, c\}$	$c=5$ 时，动态集为 $\{9,1,5\}$，静态集为 $\{6,4,5\}$，中心值 5 在两组中

对 $w=3, c=5$: 动态集 $\{8,2,5\}$, 静态集 $\{6,4,5\}$。完整验证: 9 个元素 $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 各出现一次。**唯一解**：$w=3$。 □

6.1 中宫值 c 的确定

c 由 L_∞ 范数最小化确定: 要求所有元素在 $[1,9]$ 且互异, 最小 c 满足 $\max(|c+3|, |c-3|) \leq 9$ 且 $\min(c-3) \geq 1$。

由 $c-3 \geq 1$ 得 $c \geq 4$；由 $c+3 \leq 9$ 得 $c \leq 6$。

$c=5$ 使元素范围对称：$[5-3, 5+3] = [2,8]$，加上静态扩展至 $[1,9]$，且 L_∞ 范数最小。

6.2 幻和 15

由 M 的行和为 0，$\ell(M)$ 的行和亦为 0。经典投影 $L_{终} = \ell(M)+5$ 每行加 5，每行 3 个元素，故每行和为 $3 \times 5 = 15$。

7 推论：洛书结构

推论 1. 在经典投影（互异正整数、L_∞ 最小化）约束下，洛书是满足公理 1–3 的最小离散代数结构的唯一非平凡整数表示。

推论 2. 幻和 $15 = 3 \times 5$，其中 3 来自维度，5 来自基元数。

8 讨论与展望

8.1 理论意义

本文将洛书从文化现象重新定位为数学必然。在经典投影约束下，三条简单公理（存在、分裂、守恒）唯一确定了 3×3 幻方结构。

注 7. 3 阶幻方在旋转和反射等价下仅有 1 种本质解（即洛书），共 8 种对称形式。4 阶幻方才有 880 种本质解（Bouton, 1917）。本文的 8 种解对应于 3 阶幻方的完整对称群，与已知组合数学结果一致。本文的 "必然性" 指数学结构在公理体系与表示约束下的唯一性，不涉及历史因果主张。

8.2 与更广泛框架的关系

本文是更广泛研究计划的一个切片。五态基元与三态编码的深层联系将在后续工作中探讨。

8.3 应用前景

该框架可推广为离散守恒流生成器（DCL-Tool），用于网络流设计、离散优化等领域。

致谢

作者衷心感谢 AI 助手（灵豆、DeepSeek、千问、Kimi 等）在数学推导、量纲分析、TEX 排版方面提供的技术支持。所有核心物理洞见、理论框架与最终结论均为作者原创学术贡献，作者对本工作的学术内容承担全部责任。

参考文献

[1] C. B. Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, Dover, 1959.

[2] J. H. Conway, *On Numbers and Games*, A K Peters, 2001.

[3] W. Lawvere, "Diagonal Arguments and Cartesian Closed Categories," in *Category Theory, Homology Theory and their Applications II*, Springer, 1969.

[4] J. Baez, "This Week's Finds in Mathematical Physics," 1993–2010.

[5] W. R. Ashby, *An Introduction to Cybernetics*, Chapman & Hall, 1956.

[6] J. A. Gallian, "A Dynamic Survey of Graph Labeling," *Electronic Journal of Combinatorics*, 1998.

[7] J. A. De Loera, J. Rambau, F. Santos, *Triangulations: Structures for Algorithms and Applications*, Springer, 2010.

[8] C. Godsil, G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Springer, 2001.

[9] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Springer, 1995.