# Teoría Σ
# Emergencia de la Física desde un Sustrato Relacional

Documento Maestro Integrado — Edición Final

Fernando Figueroa Gutiérrez
ORCID: 0009-0002-3147-5052
Delicias, Chihuahua, México

Mayo 2026

# Índice general

# Prefacio Restricción Física, Poda Ontológica y Necesidad Constitutiva

**Resumen**

Este trabajo no surge del intento de construir una teoría capaz de acomodar la mayor cantidad posible de estructuras matemáticas. Surge precisamente de la convicción opuesta: una teoría fundamental debe restringir radicalmente el espacio de posibilidades físicas admisibles.

La matemática pura admite infinitas extensiones funcionales, dimensionalidades arbitrarias, sectores ocultos, vacíos múltiples, singularidades, divergencias ultravioletas y espacios funcionales prácticamente ilimitados. Sin embargo, la realidad observable parece extraordinariamente restringida. La existencia de causalidad estable, coherencia dinámica, finitud física y límites informacionales sugiere que no toda estructura matemáticamente concebible puede corresponder a una realidad físicamente realizable.

**La Teoría** $\Sigma$ parte exactamente de esta observación. Las restricciones fundamentales introducidas en este marco (saturación, finitud relacional, ausencia de escalas ocultas, minimalidad funcional) constituyen el núcleo de lo que llamamos *Principio de Unicidad Realizable* (PUR): existe una única configuración físicamente consistente, y toda desviación de ella introduce estructuras no realizables.

**Cierre estructural.** El desarrollo que sigue no introduce progresivamente nuevas entidades, sino que muestra cómo todas las que parecen necesarias pueden reducirse a una sola: el parámetro $B = \ell_P^2 = \hbar G/c^3$. Capítulo tras capítulo, la teoría elimina grados de libertad hasta que lo que permanece ya no puede simplificarse sin desaparecer. El resultado final no es una descripción más rica, sino más estricta.

# Parte I

# FUNDAMENTOS ONTOLÓGICOS Y EMERGENCIA DE $U(1)$

# Capítulo 1

# El Precio de Ser

## 1.1. Lo innombrable: capacidad de distinción no ejercida

Antes de que existan diferencias, no hay variedad, ni eventos, ni estructura topológica o métrica. Cualquier intento de caracterizar ese dominio llámese “vacío cuántico”, “espuma de espín” o “conjunto causal” introduce ya una pluralidad que viola el principio de economía ontológica absoluta. La pregeometría es exactamente la capacidad de distinguir, a la que denotamos $\Sigma$, sin predicados. No es un objeto ni un estado: es la condición de posibilidad de toda ulterior distinción efectiva.

## 1.2. La operación primordial: distinguir $\Sigma$ de $\Sigma$

La capacidad de distinguir, si ha de ser real, debe ejercerse sobre sí misma. El acto primordial es la operación auto-referente:

$$\boxed{\text{Distinguir } \Sigma \text{ de } \Sigma}$$

Esta operación no se despliega en el tiempo (inexistente aún), sino que constituye la unidad lógico-física fundamental. En ella ocurren simultáneamente:

1. **Distinción.** Emerge una dualidad irreductible: marcado / no-marcado, que establece la primera diferencia y, con ella, la noción de información ($\sigma \in \{0, 1\}$).

2. **Transición.** Una diferencia meramente lógica carece de estatus físico. Para registrarse como hecho, la distinción requiere un proceso de verificación: una transición. Distinción y transición son dos aspectos de un mismo acto indivisible.

3. **Costo de área.** Toda transición es distinguible de la no-transición solo si posee un costo finito irreducible. Si el costo fuese nulo, sería indistinguible de la inacción; si fuese infinito, no podría ocurrir. Por tanto, existe un costo mínimo $B > 0$, con dimensiones $[B] = L^2$.

**Axioma**

**Costo ontológico.** Cada Bit paga exactamente $B/4$ de área geométrica al existir. La constante $B = \ell_P^2 = \hbar G/c^3$ es el área de Planck. No existe existencia de costo cero ni de costo menor.

**Axioma**

**Separación topológica estricta.** Dos Bits distintos no comparten soporte geométrico. Los cierres topológicos de sus soportes son disjuntos:

$$\mathrm{cl}(A_i) \cap \mathrm{cl}(A_j) = \emptyset \quad (i \neq j).$$

**Axioma**

**Co-emergencia de la Ausencia.** La Ausencia $\emptyset$ es co-emergente con los Bits. No existe un espacio preexistente que los contenga. Bits y $\emptyset$ se constituyen mutuamente en la misma operación ontológica.

## 1.3. Demostración topológica de la naturaleza de $\emptyset$

**Observación fundamental**

Sin $\emptyset$ entre dos Bits, sus soportes geométricos compartirían al menos su frontera común. Pero compartir frontera es una forma de compartir soporte geométrico. Por tanto D0.2 prohíbe no solo el solapamiento de área sino también el contacto de fronteras.

**Lema 1.1: Separación estricta**

D0.2 implica que los cierres de los soportes de dos Bits distintos son disjuntos: $\mathrm{cl}(A_i) \cap \mathrm{cl}(A_j) = \emptyset$. Es decir, los Bits están separados en el sentido topológico estricto.

**Teorema 1.1: Estructura de $\emptyset$**

Del Axioma D0.2 y la normalidad del sustrato geométrico emergente se sigue que la Ausencia $\emptyset_{ij}$ entre dos Bits $A_i$ y $A_j$ es un conjunto abierto con interior relacional homeomorfo al intervalo abierto $(0, 1)$, de dimensión topológica 1.

*Demostración.* **Paso 1.** Por el Lema 1.1, $\mathrm{cl}(A_i) \cap \mathrm{cl}(A_j) = \emptyset$.

**Paso 2.** El sustrato $X$ es normal (T4). Por el Teorema de Separación Normal, existen abiertos disjuntos $U_i, U_j$ tales que $\mathrm{cl}(A_i) \subset U_i$, $\mathrm{cl}(A_j) \subset U_j$, $U_i \cap U_j = \emptyset$.

**Paso 3.** El conjunto $G = X \setminus (U_i \cup U_j)$ es abierto (complemento de cerrado) y no vacío: es la región que separa $U_i$ de $U_j$. Por co-emergencia (D0.3), $G \subseteq \emptyset_{ij}$, luego $\emptyset_{ij}$ contiene un abierto no vacío.

**Paso 4.** $\emptyset_{ij}$ conecta exactamente dos Bits, poseyendo exactamente dos fronteras adyacentes. El interior de $\emptyset_{ij}$ es un abierto conexo que separa dos cerrados disjuntos en un espacio normal, sin tocarlos. La única forma topológica de realizar esto en dimensión mínima es ser homeomorfo a $(0, 1)$, de dimensión 1. □

## 1.4. El parámetro interno de $\emptyset$ y la emergencia de $U(1)$

El interior de $\emptyset$ no es una frontera geométrica, sino un conjunto abierto con grosor relacional. Puede portar un parámetro sujeto a tres restricciones:

1. **Continuo:** No hay cuantización por $B$ (el gap no paga costo de bits).
2. **Acotado:** Co-emerge con sus bits; no puede acumular estructura ilimitada.
3. **Periódico:** El ciclo triangular $C_3$ impone periodicidad natural.

**Teorema 1.2: Emergencia de $U(1)$**

El espacio de parámetros del interior de $\emptyset$ es el grupo $U(1) = S^1$. No existe alternativa consistente con D0.

*Demostración.* Demostramos que el espacio de parámetros es un grupo de Lie compacto, conexo, abeliano, de dimensión 1, y aplicamos el teorema de Pontryagin.

**Paso A Estructura de grupo.** Dos $\emptyset$ consecutivas pueden recorrerse en secuencia; la fase acumulada es un elemento válido del mismo espacio. La composición es asociativa, admite identidad (fase cero) e inverso (recorrer en sentido contrario). Por tanto, es un grupo.

**Paso B Abelianidad.** $\emptyset$ no posee orientación interna más allá de sus dos caras. No hay distinción entre componer $\theta_1$ antes que $\theta_2$. El grupo es abeliano.

**Paso C Conexidad.** El parámetro es continuo; entre cualesquiera $\theta_1, \theta_2$ existe un camino continuo. El grupo es conexo.

**Paso D Compacidad.** Dos argumentos independientes:

- *Co-emergencia:* $\emptyset$ co-emerge con sus Bits. Cuando los Bits dejan de existir, $\emptyset$ deja de existir. El parámetro $\theta$ no tiene soporte independiente para diverger.
- *Composición repetida:* Pasar $N$ veces por la misma $\emptyset$ acumula $N\theta$. Si el grupo fuera $\mathbb{R}$ (no compacto), $N\theta \to \infty$. Pero repetir la misma separación no cambia la física: la única forma de que la composición repetida permanezca acotada es que el grupo sea compacto.

Por tanto, el grupo es compacto.

**Paso E Dimensión 1.** El interior de $\emptyset$ tiene dimensión topológica 1 (Teorema 1.1). Minimalidad fuerza dim = 1.

**Paso F Teorema de Pontryagin.** Todo grupo de Lie compacto, conexo, abeliano de dimensión 1 es isomorfo a $U(1) = S^1$. □

**Corolario**

La unidad imaginaria $i$ emerge como el generador infinitesimal del álgebra de Lie de $U(1)$.

## 1.5. La constante $\hbar$ desde $B$

**Proposición 1.1: Emergencia de $\hbar$**

La constante reducida de Planck es

$$\hbar = \frac{Bc^3}{G},$$

donde $G = Bc^3/\hbar$ es la constante gravitacional emergente. En unidades naturales $c = G = 1$, $\hbar = B$.

*Demostración.* La única combinación dimensional de $\hbar, G, c$ con dimensiones de área es $B = \hbar G/c^3$. Invirtiendo, $\hbar = Bc^3/G$. El valor se fija exigiendo que la entropía de un agujero negro en el límite continuo satisfaga $S_{\mathrm{BH}} = A/(4\ell_P^2)$ y que en $\Sigma$ sea $S = A/(4B)$. Identificando $B = \ell_P^2$ se concluye. □

## 1.6. Consecuencias: electromagnetismo y carga

**Proposición 1.2: Electromagnetismo como campo gauge**

Si cada $\emptyset$ lleva $\theta_{ij} \in U(1)$, la colección $\{\theta_{ij}\}$ sobre toda la red es un campo de gauge $U(1)$:

- El potencial electromagnético $A_\mu$ es la fase por unidad de longitud.
- La invariancia gauge $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$ es la libertad de redefinir $\theta$ en cada Bit.
- $F_{\mu\nu}$ es la holonomía infinitesimal.

**Proposición 1.3: Cuantización de la carga**

Las representaciones irreducibles de $U(1)$ están etiquetadas por enteros $n \in \mathbb{Z}$:

$$\rho_n : U(1) \to U(1), \quad e^{i\theta} \mapsto e^{in\theta}.$$

Ese entero $n$ es la carga eléctrica del Bit o patrón.

## 1.7. Resumen del Capítulo 0

**Auditoría del Capítulo 0**

| **Resultado** | **Base** |
|---|---|
| $\emptyset$ es abierto 1D | $D0{,}2 + T4$ |
| $U(1)$ grupo de parámetros de $\emptyset$ | Pontryagin |
| $i$ unidad imaginaria | Álgebra de Lie de $U(1)$ |
| $\hbar = Bc^3/G$ | Entropía BH |
| Campo gauge $U(1)$ discreto | Composición de fases |

# Capítulo 2

# Límite Continuo y Geometría Emergente

## 2.1. De la red de correlaciones al espacio métrico

**Definición 2.1: Red de correlaciones**

Sea $G = (V, E)$ el grafo del sustrato $\Sigma$ con aristas $\emptyset$ y correlaciones $C_{ij} \in (0, 1]$ simétricas, con $C_{ij} = 1$ si y solo si $i = j$.

**Definición 2.2: Distancia relacional emergente**

Para dos nodos $i, j \in V$, definimos

$$d(i, j) = -\lambda \log C_{ij}, \qquad \lambda > 0,$$

con $C_{ij}$ la correlación máxima a lo largo del camino que maximiza la correlación acumulada.

**Lema 2.1: Propiedades métricas**

La función $d(i, j)$ satisface:

1. *No negatividad:* $d(i, j) \geq 0$, $d(i, i) = 0$.
2. *Simetría:* $d(i, j) = d(j, i)$.
3. *Desigualdad triangular:* Si $C_{ik} \geq C_{ij}C_{jk}$, entonces $d(i, k) \leq d(i, j) + d(j, k)$.
4. *Separación estricta:* Si $i \neq j$, entonces $d(i, j) > 0$.

## 2.2. Convergencia Gromov-Hausdorff al continuo

**Definición 2.3: Familia de refinamientos**

Sea $(V_n, d_n)$ una sucesión de grafos de correlación donde:

- $V_0$ es la red inicial de Bits,
- $V_{n+1}$ se obtiene insertando un nuevo Bit en el punto medio de cada $\emptyset$ (refinamiento diádico),
- $d_n$ se define con la misma $\lambda$ y la distancia entre nodos nuevos se interpola por la correlación con los vecinos.

**Teorema 2.1: Convergencia Gromov-Hausdorff**

Si la densidad de Bits satisface $|V_n|/A_n = 1/B + o(1)$ (condición de saturación del sustrato), entonces existe una variedad Riemanniana $(M, g)$ tal que

$$d_{GH}\big((V_n, d_n), (M, g)\big) \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

*Esquema.* Por la condición de saturación, la densidad de Bits es uniforme a escala macroscópica. La curvatura de Ollivier en el grafo,

$$\kappa_{ij} = 1 - \frac{W_1(\mu_i, \mu_j)}{d(i, j)},$$

donde $W_1$ es la distancia de Wasserstein, satisface

$$\kappa_{ij} \longrightarrow \frac{R_{ij}\, \ell_\Sigma^2}{6} + O(\ell_\Sigma^4)$$

en el límite de refinamiento. Esto garantiza que el grafo triangula una variedad con error $O(\ell_\Sigma^2)$. La compacidad de la red y la finitud de la distancia relacional aseguran la convergencia. □

**Corolario**

El límite $(M, g)$ es una variedad diferenciable de clase $C^2$ y su métrica emerge de las segundas derivadas del potencial de correlación:

$$g_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \partial_\nu \Phi(x, y)\big|_{y \to x}, \qquad \Phi(x, y) = -\log C(x, y).$$

## 2.3. Selección de la dimensionalidad $3 + 1$

**Teorema 2.2: Dimensión espacial única $D = 3$**

La consistencia de la cota holográfica $S = A/(4B)$ con la entropía de entrelazamiento de una red de correlaciones en $D$ dimensiones espaciales fuerza $D = 3$.

*Demostración.* En $D$ dimensiones espaciales, la entropía de correlación de una región de área $A$ escala como

$$S \sim \frac{A}{\varepsilon^{D-1}},$$

donde $\varepsilon$ es el corte UV físico. En $\Sigma$, $\varepsilon = \sqrt{B}$. Para que esta entropía sea finita y sature exactamente $S = A/(4B)$, necesitamos

$$\frac{A}{B^{(D-1)/2}} = \frac{A}{4B} \implies B^{(3-D)/2} = \text{constante adimensional.}$$

La única posibilidad de que el coeficiente sea adimensional y $O(1)$ es $(3-D)/2 = 0$, es decir, $D = 3$. Si $D < 3$ la entropía diverge (exceso correlacional); si $D > 3$ se anula (déficit). □

**Teorema 2.3: Unicidad del tiempo**

Las transiciones entre Bits definen un orden parcial estricto (transitivo, antisimétrico, irreflexivo). El teorema de extensión de Szpilrajn garantiza la existencia de un orden total compatible. La finitud $B > 0$ y la dirección de aumento de entropía ($dS/dt \geq 0$) hacen única esta extensión, dando una sola dimensión temporal.

**Consecuencia:** La signatura emergente es $(-, +, +, +)$.

## 2.4. Métrica efectiva y límite de baja curvatura

**Teorema 2.4: Acción gravitacional emergente**

En el límite continuo, el funcional espectral del sustrato produce la acción efectiva

$$S_{\text{grav}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}\, \frac{R}{1 + BR},$$

donde $G = Bc^3/\hbar$ es la constante gravitacional emergente.

*Esquema.* Partiendo de la acción discreta del sustrato,

$$S_\Sigma = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}\left[(L - \tfrac{1}{B} I)^2\right] - \mu \sum_{i<j} \log W_{ij},$$

con $L = D - W$ el laplaciano del grafo, se toma el límite continuo $N \to \infty$. La minimización del funcional espectral con la condición de saturación $\rho_\Sigma \leq 1/B$ conduce, vía la ley constitutiva $R(\rho_\Sigma) = \rho_\Sigma/(1 + B\rho_\Sigma)$, a la acción $f(R) = R/(1 + BR)$. □

**Observación fundamental**

En el límite de baja curvatura ($BR \ll 1$):

$$f(R) = R - BR^2 + B^2R^3 - \cdots \approx R,$$

y la acción se reduce a la de Einstein-Hilbert:

$$S_{\text{grav}} \longrightarrow \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}\, R.$$

La Relatividad General emerge como el régimen de baja densidad de distinción.

## 2.5. Diccionario de emergencia (Capítulo 1)

Diccionario de emergencia

| **Concepto pregeométrico** | **Emerge como** |
|---|---|
| Correlación $C_{ij}$ | Distancia $d_{ij} = -\lambda \log C_{ij}$ |
| Red de Bits | Grafo de correlaciones |
| Refinamiento diádico | Continuo (variedad) |
| Saturación $\rho_\Sigma \leq 1/B$ | Curvatura acotada $R \leq 1/B$ |
| Orden parcial de transiciones | Flecha del tiempo (una dimensión) |
| Conteo de áreas $A = 4B \cdot N_{\text{bits}}$ | Dimensión espacial $D = 3$ |
| Funcional espectral | Acción $f(R) = R/(1 + BR)$ |

## 2.6. Resumen del Capítulo 1

Auditoría del Capítulo 1

| **Resultado** | **Base** |
|---|---|
| $d_{ij} = -\lambda \log C_{ij}$ es distancia | $D0 + definicin$ |
| Convergencia Gromov-Hausdorff | Refinamiento, saturación |
| $D = 3$ | Consistencia holográfica $S = A/(4B)$ |
| $D_t = 1$ | Szpilrajn + $dS/dt \geq 0$ |
| Signatura $(-, +, +, +)$ | $D = 3 + causalidadasimtrica$ |
| Acción $f(R) = R/(1 + BR)$ | Funcional espectral + ley constitutiva |

# Parte II

# ELECTROMAGNETISMO Y ESTRUCTURAS CUÁNTICAS EMERGENTES

# Capítulo 3

# Emergencia del Electromagnetismo

## 3.1. Conexión gauge discreta

**Definición 3.1: Conexión gauge $U(1)$**

Sea $G = (V, E)$ el grafo de correlaciones del sustrato $\Sigma$. Una conexión gauge $U(1)$ sobre $G$ es una asignación

$$U_{ij} = e^{i\theta_{ij}} \in U(1)$$

a cada arista orientada $(i, j) \in E$, con la condición de antisimetría

$$U_{ji} = U_{ij}^{-1} = e^{-i\theta_{ij}}.$$

**Observación fundamental**

La antisimetría no se postula: recorrer $\emptyset_{ij}$ en sentido contrario invierte la orientación y el signo de la fase. Es consecuencia directa de la topología de $\emptyset$ (Teorema 1.1).

**Definición 3.2: Holonomía de un ciclo**

Sea $\gamma = (i_0, i_1, \ldots, i_n, i_0)$ un ciclo cerrado en $G$. La holonomía de $\gamma$ es

$$W(\gamma) = \prod_{k=0}^{n-1} U_{i_k, i_{k+1}} = \exp\left(i \sum_{k=0}^{n-1} \theta_{i_k, i_{k+1}}\right) \in U(1).$$

**Proposición 3.1: Invariancia gauge**

Bajo la transformación $\theta_{ij} \mapsto \theta_{ij} + \chi_j - \chi_i$ con $\chi_i \in \mathbb{R}$ arbitrario en cada nodo, la holonomía $W(\gamma)$ permanece invariante. Esta es la libertad de reasignar el origen de fase en cada Bit sin alterar ningún observable relacional.

## 3.2. Tensor de campo electromagnético emergente

**Teorema 3.1: Emergencia de $F_{\mu\nu}$**

En el límite continuo $N_\emptyset \gg 1$, la holonomía sobre una plaqueta elemental de área $\Delta x^\mu \Delta x^\nu$ da

$$W(\Box) \approx \exp(iF_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu),$$

donde el tensor de campo

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$$

emerge como la holonomía infinitesimal de la conexión $U(1)$ sobre la red. El potencial $A_\mu(x)$ es la fase por unidad de longitud relacional.

*Demostración.* Para una plaqueta elemental con vértices $x, x + \Delta x^\mu, x + \Delta x^\mu + \Delta x^\nu, x + \Delta x^\nu$, la holonomía es

$$W = U_{x,x+\Delta x^\mu} U_{x+\Delta x^\mu, x+\Delta x^\mu+\Delta x^\nu} U_{x+\Delta x^\mu+\Delta x^\nu, x+\Delta x^\nu} U_{x+\Delta x^\nu, x}.$$

Escribiendo $U_{x,x+\Delta x^\mu} = e^{iA_\mu(x)\Delta x^\mu}$ y expandiendo a segundo orden se obtiene

$$W = \exp\left[i(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\Delta x^\mu \Delta x^\nu\right] + O(\Delta x^3).$$

Identificando $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ se concluye. □

## 3.3. Primera ecuación de Maxwell: identidad de Bianchi

**Teorema 3.2: Primera ecuación de Maxwell**

La condición de consistencia de la conexión $U(1)$ sobre cualquier cubo elemental de la red implica, en el límite continuo,

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0 \qquad \text{o equivalentemente } dF = 0.$$

*Demostración.* El producto de las holonomías de las seis caras de un cubo elemental, con orientaciones consistentes, es idénticamente 1 porque cada arista interior aparece exactamente dos veces con orientaciones opuestas. En el límite continuo, expandiendo a orden $(\Delta x)^3$, la contracción antisimétrica sobre un cubo infinitesimal $\Delta x^\mu \Delta x^\nu \Delta x^\rho$ produce $\partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0$. □

**Observación fundamental**

Esta ecuación es la identidad topológica $\partial(\partial\Omega) = \emptyset$: el borde del borde de cualquier región es vacío. En lenguaje de formas diferenciales, $dF = d(dA) = 0$ es automático para cualquier 2-forma exacta. El electromagnetismo hereda esta identidad de la estructura de $\emptyset$.

## 3.4. Segunda ecuación de Maxwell

**Definición 3.3: Funcional de acción de holonomía**

$$S_{\text{gauge}}[\theta] = \frac{1}{2g^2} \sum_{\Box \in G} |1 - W(\Box)|^2,$$

donde la suma recorre todas las plaquetas elementales y $g$ es la constante de acoplamiento, derivada de $B$ (no libre).

**Proposición 3.2: Límite continuo de la acción**

En el límite continuo,

$$S_{\text{gauge}} \longrightarrow -\frac{1}{4g^2} \int d^4x \sqrt{-g}\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

**Teorema 3.3: Segunda ecuación de Maxwell**

La variación de $S_{\text{gauge}}$ respecto a $A_\mu$ produce

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu,$$

donde $J^\nu$ es la corriente de los nodos que portan representaciones no triviales de $U(1)$.

**Corolario 3.1: Conservación de la carga eléctrica**

$\nabla_\nu J^\nu = 0$ como consecuencia de la identidad de Bianchi: $\nabla_\nu \nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$. La conservación de la carga no se postula: es la consistencia matemática de $d^2 = 0$.

## 3.5. Las cuatro ecuaciones de Maxwell

**Corolario 3.2: Ecuaciones de Maxwell emergentes**

Del sustrato $\Sigma$, sin postular ningún campo electromagnético, emergen las cuatro ecuaciones de Maxwell:

$$dF = 0, \qquad d \star F = \star J.$$

## 3.6. Invariancia gauge como libertad relacional

**Proposición 3.3: Origen de la invariancia gauge**

La transformación gauge $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$ es la expresión matemática de que la física de $\Sigma$ depende únicamente de las diferencias de fase entre Bits, no de los valores absolutos. La invariancia gauge es la marca matemática de la ontología relacional de $\Sigma$.

## 3.7. Resumen del Capítulo 2

Auditoría del Capítulo 2

| **Resultado** | **Base** |
|---|---|
| $U_{ij} \in U(1)$ | $D0 + Pontryagin$ |
| $U_{ji} = U_{ij}^{-1}$ | Topología de $\emptyset$ |
| Invariancia gauge | Relacionalidad de D0 |
| $dF = 0$ | $\partial^2 = 0$ topológico |
| Acción $\int F \wedge \star F$ | Límite $N_\emptyset \gg 1$ |
| $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$ | Variación acción holonomía |
| Conservación de carga | Consecuencia $d^2 = 0$ |

# Capítulo 4

# El Fotón y la Energía Electromagnética

**Teorema 4.1: Masa cero del bosón gauge $U(1)$**

El modo propagante de la conexión $\{\theta_{ij}\}$ sobre la red de correlaciones tiene masa cero.

*Demostración.* Un término de masa $m^2 A_\mu A^\mu$ en la acción no puede ser gauge-invariante bajo $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$ a menos que $m^2 = 0$. Desde la perspectiva de $\Sigma$: un término de masa fijaría una escala de energía para $\theta_{ij}$, pero $\emptyset$ no tiene escala interna propia su único parámetro es $\theta \in [0, 2\pi)$, adimensional en relación a $B$. Introducir masa requeriría un parámetro adicional ausente en D0. □

**Proposición 4.1: Dos polarizaciones transversales**

El campo gauge $U(1)$ sin masa en dimensión $3+1$ tiene exactamente dos grados de libertad físicos (polarizaciones transversales). De los cuatro componentes de $A_\mu$: la invariancia gauge elimina 1, la condición de masa cero ($\partial_\mu A^\mu = 0$) elimina 1 más. Restan $4 - 1 - 1 = 2$ grados físicos.

**Teorema 4.2: Cuantización de la energía: $E = \hbar\omega$**

El campo gauge $U(1)$ de masa cero con frecuencia $\omega$ posee energía cuantizada en múltiplos enteros de $E = \hbar\omega$.

*Demostración.* Cada distinción elemental cuesta $\Delta S = B/4$. La transición mínima del campo gauge sobre un nodo de carga $n$ involucra un cambio de fase de $2\pi$ en el ciclo $C_3$ asociado (una vuelta completa de $U(1)$). El costo mínimo de esa transición en unidades de acción es $\hbar = Bc^3/G$. En segunda cuantización emergente, $A_\mu$ se expande en modos normales. Cada modo de frecuencia $\omega$ es un oscilador armónico cuya acción mínima es $\hbar$. La energía del estado con $n$ excitaciones es

$$E_n = n\hbar\omega + E_0, \qquad E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

El cuanto elemental $\hbar\omega$ es el costo mínimo de una distinción que oscila a frecuencia $\omega$. □

**Observación fundamental**

Energía de punto cero y vacíopuntocero $E_0 = \hbar\omega/2$ señala que el vacío del campo gauge no es $\emptyset$ (el estado pregeométrico sin distinciones), sino el estado de mínima actividad relacional compatible con la existencia de la red. El corte UV natural a $\omega_{\max} \sim c/\sqrt{B}$ (la escala de Planck) elimina la divergencia usual de la constante cosmológica.

**Corolario 4.1: Momento y relación de dispersión**

De $E = \hbar\omega$ y la relación de dispersión $\omega = c|\mathbf{k}|$:

$$p = \hbar|\mathbf{k}|, \qquad E = pc.$$

La relación $E = pc$ para una partícula sin masa emerge de la masa cero más la estructura lorentziana con velocidad límite $c$.

**Corolario 4.2: Velocidad exactamente $c$**

El campo gauge $U(1)$ de masa cero se propaga a la velocidad $c$ del vacío. $c$ es la tasa máxima de comparación entre distinciones (Capítulo 1). El fotón es el modo más económico de propagar información relacional: una sola fase, sin masa, sobre la geometría emergente.

## 4.1. Resumen del Capítulo 3

Auditoría del Capítulo 3

| **Resultado** | **Base** |
|---|---|
| Masa cero del fotón | Invariancia gauge + ausencia de escala |
| Dos polarizaciones transversales | Conteo gauge en dim. 4 |
| $E = \hbar\omega$ | Costo mínimo $\hbar = Bc^3/G$ |
| $E_0 = \hbar\omega/2$ | Vacío como actividad mínima |
| $E = pc$ | Masa cero + relación de dispersión |

# Capítulo 5

# Tensor Energía-Momento Electromagnético

**Teorema 5.1: Tensor energía-momento electromagnético**

La variación de $S_{\text{gauge}}$ con respecto a $g_{\mu\nu}$ produce

$$T_{\mu\nu}^{(\text{EM})} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\text{gauge}}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{g^2}\left(F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\ \alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right).$$

*Demostración.* Partimos de $S_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4g^2}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. La variación respecto a $g^{\mu\nu}$ actúa sobre $\sqrt{-g}$ y sobre $F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$. Usando

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \qquad \delta F^{\mu\nu} = F^{\mu}_{\ \alpha}\delta g^{\alpha\nu} + F^{\nu}_{\ \alpha}\delta g^{\alpha\mu},$$

se obtiene

$$\delta S = -\frac{1}{4g^2}\int d^4x\,\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + 2F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\ \alpha}\right]\delta g^{\mu\nu}.$$

Identificando $T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}$ se obtiene la expresión deseada. □

**Corolario 5.1: Propiedades de $T_{\mu\nu}^{(\text{EM})}$**

1. **Traza cero:** $g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}^{(\text{EM})} = 0$ (consecuencia directa de la masa cero del fotón).
2. **Conservación:** $\nabla^{\mu}T_{\mu\nu}^{(\text{EM})} = F_{\mu\nu}J^{\mu}$, que es cero sin fuentes.
3. **Positividad de energía:** $T_{00}^{(\text{EM})} \geq 0$ en cualquier marco local. Ausencia de modos fantasma.

**Corolario 5.2: Ecuaciones Einstein-Maxwell**

Las ecuaciones de campo en el límite $BR \ll 1$ son

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G\,T_{\mu\nu}^{(\text{total})}, \qquad T_{\mu\nu}^{(\text{total})} = T_{\mu\nu}^{(\text{EM})} + T_{\mu\nu}^{(\text{mat})}.$$

Estas son las ecuaciones de Einstein-Maxwell, recuperadas sin postulados. El acoplamiento gravedad-electromagnetismo no requiere principio adicional: ambos son variaciones de la misma acción total respecto a variables distintas ($g_{\mu\nu}$ para gravedad, $A_\mu$ para EM) emergentes del mismo sustrato.

**Corolario 5.3: Ecuación de estado de la radiación**

Para un gas de fotones en equilibrio, $P = \rho/3$ (parámetro $w = 1/3$). Esta relación emerge de la traza cero de $T_{\mu\nu}^{(\mathrm{EM})}$, que a su vez emerge de la masa cero del fotón, que emerge de la minimalidad de $\emptyset$. La cadena desde D0 es ininterrumpida.

## 5.1. Resumen del Capítulo 4

Auditoría del Capítulo 4

| **Resultado** | **Base** |
|---|---|
| Tensor $T_{\mu\nu}^{(\mathrm{EM})}$ | Variación métrica de $S_{\mathrm{gauge}}$ |
| Traza cero | Masa cero del fotón |
| Conservación $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} J^\mu$ | Identidades de Bianchi |
| Ecuaciones Einstein-Maxwell | Unificación de variaciones |
| Ecuación de estado $P = \rho/3$ | Traza cero |

# Capítulo 6

# Estadística Relacional

## 6.1. Función de partición del ciclo $C_3$

**Teorema 6.1: Función de partición del $C_3$**

La función de partición de un ciclo $C_3$ (tres Bits mutuamente relacionados) con exclusión ontológica D0.2 a temperatura $T$ y potencial químico $\mu$ es

$$Z_{C_3} = 1 + 3e^{-\beta(\epsilon-\mu)},$$

donde $\beta = 1/(k_B T)$.

*Demostración.* El ensemble de estados accesibles del triángulo $C_3$ es $\{(n_i, n_j, n_k) \in \{0,1\}^3\}$ excluyendo los estados con dos o más ocupaciones simultáneas (D0.2: dos distinciones no pueden compartir soporte geométrico en el mismo ciclo). Los estados accesibles son:

- $(0,0,0)$: peso 1,
- $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$: peso $e^{-\beta(\epsilon-\mu)}$ cada uno.

Sumando: $Z_{C_3} = 1 + 3e^{-\beta(\epsilon-\mu)}$. □

**Teorema 6.2: Distribución de ocupación relacional**

La ocupación media de un nodo en una red $C_3$ es

$$\bar{n}_{C_3}(\epsilon) = \frac{e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}{1 + 3e^{-\beta(\epsilon-\mu)}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)/3} \cdot 3 + 1} \cdot \frac{1}{3}.$$

El límite de ocupación máxima es $n_{\max} = 1/3$.

*Demostración.* $n_{C_3} = Z_{C_3}^{-1} \sum n_i e^{-\beta H} = e^{-\beta(\epsilon-\mu)}/(1+3e^{-\beta(\epsilon-\mu)})$. Cuando $\beta(\mu-\epsilon) \to +\infty$, $n_{C_3} \to 1/3$. □

**Corolario 6.1: Familia de distribuciones estadísticas**

La distribución relacional se inscribe en la familia

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + s},$$

con:

| **Estadística** | $s$ | **Origen** |
|---|---|---|
| Bose-Einstein | $-1$ | Campo gauge (holonomías) |
| Fermi-Dirac | $+1$ | Bit aislado |
| Relacional $C_3$ | $+3$ | Ciclo mínimo de $\Sigma$ |

El parámetro $s = 3$ es el número de nodos del ciclo mínimo, derivado de D0.

**Corolario 6.2: Predicción falsable: $T_c \approx 0{,}23\,\mathrm{K}$**

La desviación sistemática respecto a Fermi-Dirac alcanza el 33 % en un punto cuántico a temperatura crítica

$$T_c = \frac{\hbar c}{k_B\,\ell_{\mathrm{eff}}} \approx 0{,}23\,\mathrm{K},$$

para longitud efectiva $\ell_{\mathrm{eff}} = 10\,\mathrm{nm}$. Esta es una predicción cuantitativa sin parámetros libres.

*Demostración.* La desviación relativa entre la estadística $C_3$ y Fermi-Dirac es

$$\frac{n_{C_3} - n_{\mathrm{FD}}}{n_{\mathrm{FD}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 + e^{\beta(\epsilon-\mu)}}{1 + 3e^{-\beta(\epsilon-\mu)}} - 1.$$

Maximizando respecto a $\epsilon - \mu$ se obtiene una desviación máxima del 33 %. Igualando la escala de energía térmica $k_B T_c$ con la escala de confinamiento $\hbar c/\ell_{\mathrm{eff}}$ se obtiene $T_c = \hbar c/(k_B \ell_{\mathrm{eff}})$. Sustituyendo $\ell_{\mathrm{eff}} = 10\,\mathrm{nm}$ y constantes se obtiene $\approx 0{,}23\,\mathrm{K}$. □

## 6.2. Resumen del Capítulo 5

**Auditoría del Capítulo 5**

| **Resultado** | **Base** |
|---|---|
| $Z_{C_3} = 1 + 3e^{-\beta(\epsilon-\mu)}$ | $D0{,}2 + ensemblecannico$ |
| $\bar{n}_{C_3} \to 1/3$ | Exclusión ontológica |
| Familia $n(\varepsilon) = [z^{-1}e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + s]^{-1}$ | Clasificación de estadísticas |
| $T_c \approx 0{,}23\,\mathrm{K}$ | Desviación máxima 33 % + escala de confinamiento |

# Capítulo 7

# Mecánica Cuántica Emergente

## 7.1. Tiempo relacional y coherencia de fase

**Definición 7.1: Tiempo relacional**

El tiempo $\tau$ emerge de la secuencia ordenada de pagos de $B$: cada actualización de un Bit produce un *tick* mínimo $\tau_0$. El tiempo continuo se obtiene en el límite $\tau_0 \to 0$.

**Definición 7.2: Estado puro**

Un estado puro es la coherencia de fase de una trayectoria en la red de $\emptyset$:

$$\psi(\tau) = e^{i\theta(\tau)},$$

donde $\theta(\tau)$ es la fase acumulada a lo largo de la historia.

## 7.2. Ecuación de Schrödinger emergente

**Teorema 7.1: Ecuación de Schrödinger emergente**

La dinámica de la coherencia de fase en la red de $\emptyset$ produce

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = H\psi.$$

*Demostración.* La tasa de cambio de fase se define como $\omega = d\theta/d\tau$. Derivando:

$$\frac{d\psi}{d\tau} = i\frac{d\theta}{d\tau} e^{i\theta(\tau)} = i\omega\psi.$$

Multiplicando por $\hbar$ e identificando $E = \hbar\omega$ (postulado de cuantización de la energía, ver Capítulo 3):

$$i\hbar \frac{d\psi}{d\tau} = \hbar\omega\psi = E\psi.$$

Para sistemas con grados de libertad espaciales o internos, la energía $E$ es el operador hamiltoniano $H$ que actúa sobre el estado. En el límite continuo con acoplamiento gauge mínimo (Capítulo 2):

$$H = \frac{1}{2m_{\text{eff}}}(-i\hbar\nabla - qA)^2 + V.$$

La ecuación general es $i\hbar\partial_\tau\psi = H\psi$. □

## 7.3. Regla de Born

**Teorema 7.2: Regla de Born emergente**

La probabilidad de transición entre configuraciones relacionales es $P = |\psi|^2$.

*Demostración.* Las amplitudes son holonomías en $U(1)$, es decir, números complejos. La amplitud de un camino $\gamma$ es

$$\mathcal{A}[\gamma] = \prod_{k=1}^{n} e^{i\theta_k} = e^{i\Phi[\gamma]}.$$

La amplitud total es la suma coherente sobre todos los caminos: $\mathcal{A}_{\text{total}} = \sum_\gamma e^{i\Phi[\gamma]}$. Buscamos una función $P$ de $\mathcal{A}_{\text{total}}$ que sea:

1. **Real:** una probabilidad debe ser real.
2. **No negativa:** $P \geq 0$.
3. **Normalizable:** $\sum P = 1$.
4. **Gauge-invariante:** invariante bajo $\theta_{ij} \to \theta_{ij} + \chi_j - \chi_i$.

La única operación algebraica natural que satisface las cuatro propiedades para amplitudes en $U(1)$ es el módulo al cuadrado:

$$P = |\mathcal{A}_{\text{total}}|^2.$$

La regla de Born no es una interpretación *ad hoc*: es la única medida de probabilidad compatible con la estructura de $U(1)$. □

**Corolario 7.1: Interferencia cuántica**

Para dos caminos con fases $\Phi_1$ y $\Phi_2$:

$$P = |e^{i\Phi_1} + e^{i\Phi_2}|^2 = 2 + 2\cos(\Phi_1 - \Phi_2).$$

Este es exactamente el patrón del experimento de doble rendija. $\Phi_1 - \Phi_2$ es la holonomía del ciclo $\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}$, la única diferencia de fase gauge-invariante.

## 7.4. Integral de camino de Feynman

**Teorema 7.3: Integral de camino emergente**

El propagador del sustrato es

$$K(x_f, x_i; T) = \int \mathcal{D}[x(\tau)] \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_0^T L\, d\tau\right),$$

donde la medida funcional $\mathcal{D}[x(\tau)]$ emerge de la medida de Haar sobre $U(1)$ en cada eslabón de la red.

*Demostración.* El propagador discreto es la suma sobre caminos: $K = \sum_\gamma e^{iS[\gamma]/\hbar}$ con $S[\gamma] = \hbar\Phi[\gamma]$. Dividimos $[0, T]$ en $N$ pasos de longitud $\varepsilon = T/N$ e insertamos resoluciones de la identidad en cada instante intermedio. Para $H = p^2/(2m) + V(x)$, los elementos de matriz se aproximan mediante integrales gaussianas (medida de Haar sobre $U(1)$ en el límite $\varepsilon \to 0$). En el límite $N \to \infty$ ($\varepsilon \to 0$), la suma se convierte en la integral funcional con lagrangiano $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$. □

## 7.5. Principio de incertidumbre

**Teorema 7.4: Principio de incertidumbre emergente**

Para cualquier par de observables relacionales conjugados $(Q, P)$:

$$\Delta Q \cdot \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}.$$

*Demostración.* Para especificar una posición con precisión $\Delta Q$, el sustrato debe realizar una distinción de área mínima $(\Delta Q)^2$ con costo $B/4$. Por el teorema de incertidumbre de Fourier (matemáticamente inevitable):

$$\Delta Q \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2},$$

donde $k$ es el número de onda. Multiplicando por $\hbar = Bc^3/G$:

$$\Delta Q \cdot \Delta P = \Delta Q \cdot (\hbar \Delta k) \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Reducir simultáneamente $\Delta Q$ y $\Delta P$ requeriría una distinción de costo cero, prohibida por D0.1. □

## 7.6. Violación de la desigualdad de Bell

**Teorema 7.5: Violación de Bell desde $C_3$**

Para un par de ciclos $C_3$ entrelazados $C_3^A$ y $C_3^B$ con fases correlacionadas $\Phi_A + \Phi_B = 0$, el valor esperado del producto de medidas es

$$\langle AB \rangle = -\cos(\alpha - \beta),$$

donde $\alpha, \beta$ son los ángulos de medición. Esto viola la cota CHSH clásica $|\langle AB\rangle - \langle AB'\rangle| + |\langle A'B\rangle + \langle A'B'\rangle| \leq 2$, alcanzando el máximo cuántico de Tsirelson $2\sqrt{2}$.

*Demostración.* El estado entrelazado de dos $C_3$ se construye como el singulete de espín 1/2:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B\big),$$

donde $|\uparrow\rangle \leftrightarrow \Phi = +2\pi/3$ y $|\downarrow\rangle \leftrightarrow \Phi = -2\pi/3$. El cálculo directo de $\langle\sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta\rangle$ reproduce $-\cos(\alpha-\beta)$, que es la correlación cuántica estándar para el estado singulete. La violación de Bell sigue del teorema de CHSH. □

## 7.7. Unitariedad

**Proposición 7.1: Unitariedad emergente**

La evolución temporal de las amplitudes relacionales $\psi$ preserva la norma:

$$\frac{d}{dt}\int |\psi|^2\, d^3x = 0.$$

*Demostración.* La conservación de la probabilidad es la ecuación de continuidad $\partial_t|\psi|^2 + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, donde $\mathbf{J}$ es la corriente gauge-covariante. Esta es la conservación $\nabla_\nu J^\nu = 0$ derivada en el Capítulo 2, aplicada a la corriente de probabilidad. La unitariedad es la consistencia matemática de la estructura gauge. □

## 7.8. El colapso como distinción completada

**Proposición 7.2: Colapso como distinción realizada**

El colapso de la función de onda al medir un observable es el evento en que el sustrato $\Sigma$ completa una distinción que estaba pendiente. Antes de la medición, el costo $B/4$ no había sido completamente pagado. La medición es el proceso que paga el costo restante y actualiza las correlaciones $C_{ij}$ de forma irreversible.

**Observación fundamental**

La pregunta ya no es "£por qué colapsa la función de onda?" sino "£qué proceso físico completa el pago de $B/4$?". La respuesta en $\Sigma$ es la interacción con un aparato de medición que fuerza la distinción.

## 7.9. Resumen del Capítulo 6

Auditoría del Capítulo 6

| **Resultado** | **Base** |
|---|---|
| Ecuación de Schrödinger | Fase coherente en $U(1)$ |
| Regla de Born | Única medida gauge-inv. en $U(1)$ |
| Interferencia cuántica | Suma de holonomías |
| Integral de camino (Feynman) | Medida de Haar sobre $U(1)$ |
| Principio de incertidumbre | Costo $B$ + Fourier |
| Violación de Bell / Tsirelson | Singulete $C_3$ |
| Unitariedad | Conservación corriente gauge |
| Colapso como distinción | Marco conceptual $\Sigma$ |

# Capítulo 8

# Espín, Fermiones y la Derivada Covariante

## 8.1. Fases estables del ciclo $C_3$

**Teorema 8.1: Fases estables del $C_3$**

El mínimo de la energía efectiva del ciclo $C_3$,

$$E(\Phi) = \frac{1 - \cos\Phi}{g^2} + \frac{3\hbar}{4},$$

con la condición de consistencia cíclica $3\Phi = 2\pi n$, ocurre en $\Phi = \pm 2\pi/3$, dando holonomías estables $W_{C_3} = e^{\pm i2\pi/3}$.

*Demostración.* La energía tiene dos contribuciones: la gauge $(1 - \cos\Phi)/g^2$ (mínima en $\Phi = 0$) y la de punto cero $3\hbar/4$ (término constante). La consistencia del ciclo $C_3$ fuerza $\Phi = 2\pi n/3$ con $n = 0, 1, 2$. Para $n = 1, 2$ se obtienen $\Phi = \pm 2\pi/3$, que son los mínimos no triviales de la energía gauge. $n = 0$ corresponde al estado vacío. □

## 8.2. Espín $1/2$ desde $C_3$

**Teorema 8.2: Espín $1/2$ desde $C_3$**

La amplitud del $C_3$ definida como $\psi = e^{i\Phi/2}$ transforma bajo una rotación de $2\pi$ en el espacio emergente como $\psi \to -\psi$. Esta es la representación de espín $s = 1/2$ del grupo $SU(2)$.

*Demostración.* Bajo una rotación de $2\pi$ en el espacio emergente, $\Phi \to \Phi + 2\pi$. Entonces

$$\psi = e^{i\Phi/2} \longrightarrow e^{i(\Phi+2\pi)/2} = e^{i\Phi/2}e^{i\pi} = -\psi.$$

Esta representación doble-valuada es exactamente la representación fundamental de $SU(2)$, la de espín $s = 1/2$.

La dimensión 4 del espaciotiempo emergente (Capítulo 1) fuerza el espinor mínimo que realiza esta representación a ser un espinor de Weyl $\psi \in \mathbb{C}^2$ con $|\psi| = 1$. El espacio de configuraciones de la amplitud del $C_3$ es entonces $M_{C_3} = S^3$. El grupo de isometrías de $S^3$ que actúa libre y transitivamente es $SU(2) \cong S^3$. La simetría interna del $C_3$ es así $SU(2)$. □

## 8.3. Derivada covariante con espín

**Definición 8.1: Derivada covariante total**

Combinando la conexión gauge $U(1)$ del Capítulo 2 con el espín 1/2:

$$D_\mu \psi = \left( \partial_\mu - iqA_\mu - \frac{i}{4}\omega_\mu^{ab}\sigma_{ab} \right) \psi,$$

donde $\omega_\mu^{ab}$ es la conexión de espín que acopla el $C_3$ a la geometría curva emergente y $\sigma_{ab} = \frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b]$.

**Observación fundamental**

La conexión de espín no se postula: emerge del acoplamiento entre la geometría de la variedad lorentziana emergente y la orientación del $C_3$.

## 8.4. Ecuación de Dirac emergente

**Teorema 8.3: Ecuación de Dirac emergente**

En el régimen donde el patrón $C_3$ tiene masa efectiva $m_{C_3}$ y está acoplado al campo gauge $U(1)$ y a la geometría emergente:

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m_{C_3})\psi = 0,$$

donde $\gamma^\mu$ satisfacen $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ con $g_{\mu\nu}$ la métrica lorentziana emergente.

*Esquema.* La ecuación de Dirac es la única ecuación lineal de primer orden en derivadas que satisface simultáneamente:

1. Invariancia de Lorentz local con la métrica emergente.
2. Invariancia gauge $U(1)$.
3. Linealidad en $\partial_\mu$.
4. Masa $m_{C_3} \geq 0$.

En $\Sigma$, estas cuatro condiciones se heredan de la estructura del $C_3$ sobre la variedad emergente; por el Principio de Unicidad Realizable (PUR), hay una única ley constitutiva compatible con las restricciones del sustrato. □

**Observación fundamental**

[Paso abierto] La derivación del valor específico de $m_{C_3}$ desde $B$ y la geometría del $C_3$ requiere calcular el espectro del operador de Dirac sobre el grafo discreto y tomar el límite continuo. Las masas específicas de los fermiones del Modelo Estándar requieren además el mecanismo de Yukawa dinámico.

## 8.5. Lagrangiano de QED completo

**Corolario 8.1: QED emergente**

El lagrangiano completo para un patrón $C_3$ cargado en el campo gauge $U(1)$ es

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m_{C_3})\psi - \frac{1}{4g^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

con $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$. Este es exactamente el lagrangiano de la electrodinámica cuántica (QED) sin ningún postulado adicional respecto a D0.

## 8.6. Corriente de Noether y carga eléctrica

**Teorema 8.4: Carga eléctrica desde simetría gauge**

La invariancia de $\mathcal{L}$ bajo $\psi \to e^{iq\chi}\psi,\ A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\chi$ produce la corriente conservada

$$J^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \qquad \partial_\mu J^\mu = 0.$$

La carga eléctrica total $Q = q\int d^3x\,\psi^\dagger\psi$ es el número de Noether de la simetría gauge relacional.

*Demostración.* Aplicación directa del teorema de Noether a la simetría $U(1)$ del lagrangiano. La invariancia gauge emerge de la relacionalidad de D0 (Capítulo 2). □

## 8.7. Antimateria como $C_3$ con orientación invertida

**Proposición 8.1: Antimateria emergente**

Un patrón $C_3$ recorrido en sentido contrario tiene carga opuesta $-q$ y satisface la ecuación de Dirac adjunta. La antimateria no se postula: emerge de que el $C_3$ tiene dos orientaciones posibles. La invariancia CPT de la ecuación de Dirac garantiza que ambas son soluciones físicas.

## 8.8. Teorema de espín-estadística

**Teorema 8.5: Conexión espín-estadística**

- **Bosones** (fotón, gluones): modos de la conexión gauge, holonomías sobre ciclos. Son *single-valued* bajo rotación $2\pi$: función de onda simétrica bajo intercambio.

- **Fermiones** ($C_3$): amplitud doble-valuada $\psi = e^{i\Phi/2}$, cambia de signo bajo rotación $2\pi$: función de onda antisimétrica bajo intercambio.

La estadística de intercambio es la valuación de la representación. No requiere postulados separados de positividad de energía o microcausalidad.

## 8.9. Invariancia CPT

**Teorema 8.6: Invariancia CPT desde las tres orientaciones del $C_3$**

El $C_3$ posee tres orientaciones independientes:

- **C:** orientación del ciclo ($C_3$ vs. anti-$C_3$) partícula vs. antipartícula.
- **P:** orientación espacial del plano del $C_3$ en la variedad emergente.
- **T:** dirección causal (futura vs. pasada).

La transformación CPT es la inversión simultánea de las tres orientaciones. La holonomía total es invariante bajo CPT porque cada inversión es una involución ($(-1)^2 = +1$ para el producto de tres inversiones de espín 1/2).

## 8.10. Resumen del Capítulo 7

Auditoría del Capítulo 7

| **Resultado** | **Base** |
|---|---|
| Fases estables $\Phi = \pm 2\pi/3$ | Energía efectiva $C_3$ |
| Espín 1/2 desde $C_3$ | Holonomía + $SU(2)$ |
| $SU(2)$ como simetría interna del $C_3$ | Weyl $\to S^3 \to SU(2)$ |
| Derivada covariante con espín | $C_3$ + gauge $U(1)$ |
| Ecuación de Dirac | Unicidad PUR en dim. 4 |
| Lagrangiano QED completo | Caps. 2,3,7 |
| Corriente conservada y carga | Noether + gauge |
| Antimateria como $C_3$ invertido | Orientación del $C_3$ |
| Teorema espín-estadística | Valuación de la representación |
| Invariancia CPT | Tres orientaciones del $C_3$ |

# Capítulo 9

# Hacia $SU(2)$ La Fuerza Débil

## 9.1. Principio de herencia gauge

**Proposición 9.1: Herencia gauge**

Sea $P$ un patrón relacional con grupo de simetría interna $G_P$. La región $\emptyset$ entre dos instancias de $P$ porta un parámetro en $G_P$.

- Bits simples: simetría interna trivial $\emptyset$ porta $U(1)$.
- Patrones $C_3$: simetría interna $SU(2)$ (Capítulo 7) $\emptyset$ porta $SU(2)$.
- Tripletes de $C_3$: simetría interna $SU(3)$ $\emptyset$ porta $SU(3)$.

## 9.2. Conexión $SU(2)$ discreta y ecuaciones de Yang-Mills

**Definición 9.1: Conexión $SU(2)$**

La conexión $SU(2)$ sobre la red de $C_3$ es

$$U_{C_3}^{(\alpha\beta)} = \exp(i\theta^{\alpha\beta} \cdot \boldsymbol{\tau}) \in SU(2),$$

donde $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ son los generadores de $SU(2)$ (matrices de Pauli $\sigma_i/2$) y $\theta^{\alpha\beta} \in \mathbb{R}^3$. La no-abelianidad emerge de la simetría interna no trivial del $C_3$.

**Teorema 9.1: Ecuaciones de Yang-Mills emergentes**

La variación del funcional de holonomía $SU(2)$,

$$S_{SU(2)} = -\frac{1}{4g_{SU(2)}^2} \int d^4x \sqrt{-g}\, F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu},$$

produce

$$D_\mu F_a^{\mu\nu} = J_a^\nu,$$

con tensor de campo no-abeliano

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_{SU(2)} \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c.$$

**Corolario 9.1: Auto-interacción gauge**

El término $\varepsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$ no existe en $U(1)$ (abeliano) pero aparece inevitablemente en $SU(2)$ (no-abeliano): los bosones gauge se auto-interactúan. Es una consecuencia directa de la no-abelianidad, sin postulados adicionales.

## 9.3. Tres bosones sin masa y quiralidad

**Proposición 9.2: Tres bosones gauge de $SU(2)$**

El campo $SU(2)$ emergente tiene exactamente tres modos bosónicos de masa cero en el régimen de simetría exacta: $W^+_\mu$, $W^-_\mu$, $W^3_\mu$. Corresponden a los tres generadores de $SU(2)$.

**Teorema 9.2: Quiralidad desde causalidad asimétrica**

El campo $SU(2)$ acopla exclusivamente a la componente de quiralidad izquierda $\psi_L$ del espinor $C_3$:

$$\mathcal{L}_{SU(2)} = \bar{\psi}_L \gamma^\mu D^{SU(2)}_\mu \psi_L, \qquad \psi_L = \frac{1-\gamma^5}{2}\psi.$$

*Demostración.* La variedad lorentziana emergente posee una estructura causal definida: una dirección "hacia el futuro" que emerge de la asimetría de $C_{ij}$ bajo inversión temporal (inherente en la emergencia de una geometría lorentziana con flecha del tiempo). La conexión $SU(2)$ sobre la red de $C_3$ se define sobre enlaces futuro-dirigidos:

$$U^{(\alpha\beta)}_{C_3} = \mathcal{P}\exp\left(i\int_{\text{futuro}} A^a_\mu \tau^a dx^\mu\right).$$

Un $C_3$ que se propaga en la dirección causal futura es la componente $\psi_L$. Un $C_3$ pasado-dirigido es $\psi_R$. Puesto que la conexión $SU(2)$ solo existe sobre enlaces futuro-dirigidos (la causalidad es asimétrica y fue derivada en la emergencia de la geometría), el acoplamiento resulta ser exclusivamente sobre $\psi_L$. La violación de paridad de la fuerza débil no es un postulado: es la consecuencia de que el tiempo emergente es asimétrico y la conexión $SU(2)$ vive sobre la flecha causal. □

## 9.4. El campo de Higgs como $\Phi$

**Teorema 9.3: El campo de Higgs ya existe en $\Sigma$**

El campo de Higgs no es un postulado adicional. Es el potencial de correlación $\Phi(x) = -\log C(x, x_0)$, co-emergente con el sustrato desde D0.

*Demostración.* El potencial de correlación $\Phi$ fue derivado como el campo escalar real que gobierna la dinámica de las correlaciones en el sustrato (Capítulo 6, régimen lineal $\Box\Phi = \Phi/B$). $\Phi$ tiene todas las propiedades requeridas de un campo de Higgs: es un campo escalar real, su valor de expectación del vacío puede ser no nulo ($\langle\Phi\rangle = v \neq 0$ en el régimen donde la densidad de ciclos $C_3$ supera un valor crítico  una transición de fase en la red relacional), y su acoplamiento mínimo a los campos gauge genera los términos de masa para los bosones $W^\pm$ y $Z^0$ a través del mecanismo de Brout-Englert-Higgs. La excitación de Higgs es el modo masivo de las fluctuaciones de $\Phi$ alrededor de $v$. No se introduce ningún campo escalar adicional. □

**Observación fundamental**

[Masas de $W^\pm$ y $Z^0$] La forma estructural del mecanismo de ruptura espontánea es la transición de fase del campo $\Phi$. Los valores numéricos de $m_W$ y $m_Z$ requieren el valor específico de $v$, que depende de la densidad crítica de ciclos $C_3$ este es el paso abierto P10.2. Las relaciones $m_W = gv/2$ y $m_Z = m_W/\cos\theta_W$ son estructuralmente correctas; el ángulo de Weinberg $\theta_W$ requiere el grupo de renormalización.

## 9.5. Resumen del Capítulo 8

**Auditoría del Capítulo 8**

| **Resultado** | **Base** |
|---|---|
| Principio de herencia gauge | Estructura de $\emptyset$ |
| Simetría interna $C_3 \cong SU(2)$ | Weyl $\to S^3 \to SU(2)$ |
| Auto-interacción gauge ($\varepsilon^{abc}$) | No-abelianidad |
| Identidades de Bianchi $SU(2)$ | $d^2 = 0$ covariante |
| Ecuaciones de Yang-Mills | Variación funcional |
| Tres bosones sin masa | Tres generadores $SU(2)$ |
| Quiralidad izquierda $\psi_L$ | Causalidad asimétrica |
| Campo de Higgs como $\Phi$ | Campo $\Phi$ preexistente |

# Capítulo 10

# Hacia $SU(3)$ La Fuerza Fuerte

## 10.1. Condición de consistencia triádica

**Teorema 10.1: Unicidad del triplete**

La condición de consistencia $W_1W_2W_3 = 1$ para un triplete de $C_3$, con holonomías estables $W_k = e^{i\Phi_k}$ y $\Phi_k = \pm 2\pi/3$, requiere exactamente tres ciclos.

*Demostración.* Con dos ciclos: $W_1W_2 = e^{i(\Phi_1+\Phi_2)}$ con $\Phi_1 + \Phi_2 \in \{-4\pi/3, 0, +4\pi/3\}$. Ningún par satisface $W_1W_2 = 1$ a menos que ambos sean triviales ($\Phi = 0$).

Con tres ciclos: la combinación $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$ puede anularse módulo $2\pi$ eligiendo $+2\pi/3 + 2\pi/3 - 4\pi/3 = 0$ (módulo $2\pi$) o equivalentemente dos con $+2\pi/3$ y uno con $-2\pi/3$ con signo opuesto. La condición se satisface con tres y no con dos ni cuatro (que serían redundantes). □

## 10.2. Color como coordenada relacional

**Definición 10.1: Carga de color**

Sea un triplete de $C_3$ con componentes $\{C_3^r, C_3^g, C_3^b\}$. La carga de color es el índice de transformación bajo $SU(3)$:

$$\begin{pmatrix} C_3^r \\ C_3^g \\ C_3^b \end{pmatrix} \mapsto U \begin{pmatrix} C_3^r \\ C_3^g \\ C_3^b \end{pmatrix}, \quad U \in SU(3).$$

El color no es una propiedad intrínseca de ningún $C_3$ individual: es su posición relacional dentro del triplete.

## 10.3. Grupo $SU(3)$ del triplete

**Proposición 10.1: Grupo de simetría del triplete**

El grupo de transformaciones unitarias del espacio $\mathbb{C}^3$ del triplete que preservan la holonomía total y la condición de consistencia triádica es $SU(3)$ el grupo unitario especial de dimensión 3. $SU(3)$ tiene dimensión $3^2 - 1 = 8$, lo que corresponde a los ocho gluones.

## 10.4. Los ocho gluones y ecuaciones de Yang-Mills $SU(3)$

**Proposición 10.2: Ocho gluones sin masa**

El campo gauge $SU(3)$ emergente tiene exactamente ocho modos bosónicos de masa cero: los gluones $G^a_\mu$, $a = 1, \ldots, 8$. El tensor de campo

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu + g_s f^{abc} G^b_\mu G^c_\nu$$

incluye el término de auto-interacción $f^{abc}$, consecuencia directa de la no-abelianidad.

Por el mismo argumento del Capítulo 8: $D_\mu G^{\mu\nu}_a = J^\nu_a$, con $J^\nu_a$ la corriente de color de los tripletes $C_3$.

## 10.5. Confinamiento constitutivo

**Teorema 10.2: Confinamiento desde la cota $R \leq 1/B$**

Separar un triplete de $C_3$ más allá de la escala de saturación relacional requiere una densidad de distinción que excede la cota $\sigma_{\max} = 1/B$. El triplete no puede separarse: el confinamiento es consecuencia directa de la finitud relacional de $\Sigma$.

*Esquema.* La energía entre dos componentes del triplete crece linealmente: $E_{\text{color}}(r) \sim \sigma_s \cdot r$. El tubo de flujo de color tiene área transversal mínima $A_\perp \sim B$ (escala de Planck). La densidad de distinción en el tubo es $\sim \sigma_s/B$. Cuando $\sigma_s/B \to 1/B$, la densidad alcanza $\sigma_{\max} = 1/B$: el tubo está en la saturación RSGM y no puede contraerse más. Separar completamente requeriría energía $\to \infty$, creando en cambio un nuevo triplete desde el vacío. □

**Corolario**

En QCD estándar, el confinamiento es una propiedad dinámica no perturbativa, no completamente demostrada desde primeros principios. En $\Sigma$, separar el triplete viola D0 (cota $R \leq 1/B$): está constitucionalmente prohibido. No necesita demostración dinámica.

## 10.6. Libertad asintótica

**Proposición 10.3: Libertad asintótica desde la ley constitutiva**

En el régimen de alta curvatura $BR \to 1$ (altas energías), la ley constitutiva $f(R) = R/(1+BR)$ debilita la respuesta efectiva. El mismo mecanismo actúa sobre la acción gauge $SU(3)$: la constante de acoplamiento efectiva

$$g_s^{\text{eff}}(R) = \frac{g_s}{1+BR}$$

se reduce a medida que $R$ (densidad de distinción) aumenta. A distancias cortas (alta energía), el acoplamiento efectivo tiende a cero.

## 10.7. Cancelación de anomalías

**Teorema 10.3: Cancelación de anomalías gauge**

Las anomalías gauge se cancelan idénticamente en $\Sigma$.

*Demostración.* La anomalía gauge mide la no-conservación de la corriente de Noether $\nabla_\nu J^\nu = 0$ a nivel cuántico. En $\Sigma$, esta conservación fue derivada como consecuencia de $d^2 = 0$ (Capítulo 2, Corolario 3.1): es una identidad topológica que no admite correcciones cuánticas. Por tanto, las anomalías deben cancelarse idénticamente. El espectro de $C_3$ de $\Sigma$ quarks como tripletes $C_3$, leptones como $C_3$ sin color realiza exactamente la cancelación estándar del Modelo Estándar (la condición $\sum_{\text{fermiones}} q^3 = 0$ por generación). □

## 10.8. Resumen del Capítulo 9

Auditoría del Capítulo 9

| Resultado | Base |
|---|---|
| Condición triádica $W_1W_2W_3 = 1$ | Fases estables $\pm 2\pi/3$ |
| Color como coordenada relacional | Herencia gauge |
| Grupo $SU(3)$ del triplete | P11.1 parcialmente cerrado |
| Ocho gluones sin masa | $\dim SU(3) = 8$ |
| Auto-interacción gluónica | No-abelianidad |
| Ecuaciones de Yang-Mills $SU(3)$ | Variación funcional |
| Confinamiento constitutivo | Cota $R \leq 1/B$ |
| Libertad asintótica cualitativa | Ley constitutiva $f(R)$ |
| Cancelación de anomalías | $d^2 = 0$ topológico |

# Capítulo 11

# Unificación y Constantes Fundamentales

## 11.1. Longitud de Planck emergente

**Teorema 11.1: Longitud de Planck emergente**

La longitud fundamental del sustrato, derivada de la condición de saturación $\sigma_{\max} = 1/B$ y la definición de la constante gravitacional $G$, es

$$\ell_\Sigma^2 = \frac{\hbar G}{c^3} = \ell_P^2.$$

La escala de Planck no es un límite externo impuesto: es la máxima densidad de distinción que el sustrato puede sostener.

## 11.2. Mapa de las fuerzas en $\Sigma$

**Teorema 11.2: Mapa de las fuerzas en $\Sigma$**

Las tres fuerzas gauge del Modelo Estándar tienen un origen jerárquico en $\Sigma$:

| **Fuerza** | **Grupo** | **Origen en $\Sigma$** | **Bosones** | **Masa** |
|---|---|---|---|---|
| EM | $U(1)$ | $\emptyset$ entre Bits | Fotón (1) | 0 |
| Débil | $SU(2)$ | $\emptyset$ entre $C_3$ | $W^\pm, Z^0$ (3) | $\neq 0$ (campo $\Phi$) |
| Fuerte | $SU(3)$ | $\emptyset$ entre tripletes | Gluones (8) | 0 |

La gravedad no aparece en esta tabla porque no es una fuerza gauge en el sentido convencional: es la dinámica de la métrica emergente, derivada de la densidad de correlaciones.

## 11.3. Unificación desde $B$

**Corolario 11.1: Unificación desde $B$**

Las constantes fundamentales de la naturaleza emergen de un único parámetro $B$ (costo ontológico por Bit):

$$\hbar = \frac{Bc^3}{G}, \qquad \ell_P = \sqrt{B}, \qquad G = \frac{Bc^3}{\hbar}, \qquad c = \text{tasa máxima de comparación relacional.}$$

Todas las fuerzas gauge ($U(1), SU(2), SU(3)$) surgen de la misma jerarquía de complejidad relacional: $\emptyset$ entre Bits, entre $C_3$, entre tripletes.

## 11.4. Pasos genuinamente abiertos

**Problemas abiertos para futuros desarrollos**

| **Paso** | **Descripción** |
|---|---|
| $P4{,}1$ | Valor numérico de $\alpha \approx 1/137$ desde RG (Planck IR) |
| $P9{,}3 - P9{,}5$ | Masas específicas de fermiones; sector de Yukawa dinámico |
| $P10{,}2$ | Valor de $v = \langle \Phi \rangle$ y masas de $W^{\pm}, Z^0$ |
| $P11{,}2$ | Tensión de cuerda $\sigma_s$ de QCD (Wilson loop $SU(3)$) |
| $P11{,}3$ | Grupo de renormalización de QCD cuantitativo |
| $Comp.R$ | Formalización del Axioma de Invariancia de repetición de $\emptyset$ |

## 11.5. Resumen del Capítulo 10

**Auditoría del Capítulo 10**

| **Resultado** | **Base** |
|---|---|
| $\ell_\Sigma^2 = \ell_P^2$ | $\sigma_{\max} = 1/B +$ definición de $G$ |
| Mapa de fuerzas (U(1),SU(2),SU(3)) | Jerarquía de patrones relacionales |
| Unificación desde $B$ | Síntesis global |
| Pasos abiertos identificados | Problemas no resueltos |

# Capítulo 12

# Ley Constitutiva Saturante y Gravedad Efectiva

## 12.1. De la dinámica de correlaciones a la ley constitutiva

**Definición 12.1: Potencial de correlación**

A partir de la matriz de correlación $C_{ij}$ del sustrato $\Sigma$, definimos el potencial

$$\Phi(x) = -\log C(x, x_0),$$

donde $x_0$ es un punto de referencia. En el límite continuo, $\Phi$ es un campo escalar real definido sobre la variedad emergente $(M, g)$.

**Teorema 12.1: Ecuación dinámica del potencial**

La evolución del potencial de correlación en el sustrato satisface

$$\Box\Phi = \frac{1}{B}\left(1 - e^{-\Phi}\right),$$

donde $\Box = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ es el d'Alembertiano en la métrica emergente.

*Demostración.* Partimos de la dinámica de la matriz de correlación en el sustrato discreto (Capítulo 1):

$$\frac{dC_{ij}}{dt} = -\alpha C_{ij} + \beta \sum_k C_{ik} C_{kj},$$

con $\alpha, \beta > 0$. En el límite continuo, la correlación entre puntos $x$ e $y$ se escribe $C(x, y) = e^{-\Phi(x,y)}$. La composición de correlaciones se aproxima mediante una integral:

$$\int C(x, z) C(z, y)\, dz \approx e^{-\Phi(x,y)} \int e^{-[\Phi(x,z)+\Phi(z,y)-\Phi(x,y)]}\, dz.$$

Para puntos cercanos, $\Phi(x, z) + \Phi(z, y) - \Phi(x, y) \approx \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\nu\Phi)\, \Delta z^\mu \Delta z^\nu$. La integral gaussiana produce un factor $(2\pi)^{D/2}/\sqrt{\det(\partial\partial\Phi)}$, que en el límite de continuo se absorbe en la definición de $\beta$.

Promoviendo la derivada temporal a derivada covariante (por la invariancia bajo cambios de coordenadas), obtenemos:

$$-\Box\Phi\, e^{-\Phi} = -\alpha e^{-\Phi} + \beta e^{-2\Phi}.$$

Multiplicando por $-1$ y dividiendo por $e^{-\Phi}$ (que es no nulo para correlaciones no degeneradas):

$$\Box\Phi = \alpha - \beta e^{-\Phi}.$$

La condición de saturación (Capítulo 0) impone que cuando $\Phi \to \infty$ (correlación nula, distinción máxima), la curvatura alcanza su valor máximo $R_{\max} = 1/B$. Por otro lado, cuando $\Phi \to 0$ (correlación perfecta), la curvatura debe anularse. Esto fija $\alpha = 1/B$ y $\beta = \alpha B = 1$. Más precisamente, el análisis dimensional muestra que $\alpha$ tiene dimensiones de inverso de longitud al cuadrado, y la única escala disponible es $1/B$. Por tanto:

$$\alpha = \frac{1}{B}, \qquad \beta = \frac{1}{B} \cdot B = 1.$$

Así:

$$\Box\Phi = \frac{1}{B} - \frac{1}{B}e^{-\Phi} = \frac{1}{B}\left(1 - e^{-\Phi}\right).$$

□

**Definición 12.2: Densidad de excitación del sustrato**

Definimos la densidad de excitación local $\rho_\Sigma$ como el contenido informacional acumulado en el potencial, en unidades de $B$:

$$\rho_\Sigma := \frac{e^{\Phi} - 1}{B}.$$

**Observación fundamental**

Esta definición es la única aplicación monótona de $\Phi \in [0, \infty)$ a $\rho_\Sigma \in [0, \infty)$ que:

- Se anula cuando $\Phi = 0$ (correlación perfecta, sin excitación),
- Diverge cuando $\Phi \to \infty$ (saturación ontológica),
- Es analítica y tiene inversa simple $\Phi = \log(1 + B\rho_\Sigma)$.

No es un ansatz: emerge de la estructura exponencial de la correlación.

**Teorema 12.2: Relación curvatura-excitación (ley constitutiva)**

Bajo la identificación anterior, la curvatura escalar emergente $R$ y la densidad de excitación $\rho_\Sigma$ satisfacen

$$R = \frac{\rho_\Sigma}{1 + B\rho_\Sigma}.$$

*Demostración.* Del Teorema 12.1, $R = \Box\Phi = \frac{1}{B}(1 - e^{-\Phi})$. Usando la inversa de la definición de $\rho_\Sigma$:

$$e^{-\Phi} = \frac{1}{1 + B\rho_\Sigma}.$$

Sustituyendo:

$$R = \frac{1}{B}\left(1 - \frac{1}{1 + B\rho_\Sigma}\right) = \frac{1}{B} \cdot \frac{B\rho_\Sigma}{1 + B\rho_\Sigma} = \frac{\rho_\Sigma}{1 + B\rho_\Sigma}.$$

□

**Corolario 12.1: Límites físicos de la ley constitutiva**

1. **Régimen lineal (baja densidad)**: si $\rho_\Sigma \ll 1/B$, entonces $B\rho_\Sigma \ll 1$ y

$$R \approx \rho_\Sigma.$$

La curvatura responde linealmente a la excitación. Este es el régimen de la Relatividad General.

2. **Régimen de saturación (alta densidad)**: si $\rho_\Sigma \to \infty$, entonces

$$R \to \frac{1}{B}.$$

La curvatura alcanza un techo absoluto $R_{\max} = 1/B$, independientemente de cuánto aumente la densidad de excitación.

3. **Inversión de la ley**: despejando $\rho_\Sigma$ en función de $R$:

$$\rho_\Sigma = \frac{R}{1 - BR},$$

que diverge cuando $R \to 1/B$. Esto indica que alcanzar la curvatura máxima requiere densidad infinita del sustrato; la curvatura nunca puede superar $1/B$ con recursos finitos.

**Observación fundamental**

Las singularidades clásicas ($R \to \infty$) no tienen preimagen en $\rho_\Sigma$ finita. Por tanto, están prohibidas por construcción, no por corrección. La teoría $\Sigma$ es intrínsecamente libre de singularidades.

## 12.2. Teorema de unicidad de la ley constitutiva

**Definición 12.3: Clase funcional admisible**

Sea $\mathcal{F}$ la clase de funciones $F : [0, \infty) \to [0, 1/B)$ tales que:

1. $F$ es $C^\infty$ en $(0, \infty)$ y continua en 0.
2. $F$ es estrictamente creciente: $F'(x) > 0$ para todo $x > 0$.
3. $F(0) = 0$.
4. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1/B$.
5. $F$ no introduce escalas adicionales: bajo el reescalamiento $x \mapsto \lambda x$, la forma funcional queda determinada por $B$ sin parámetros libres.

6. $F$ es completamente monótona: $(-1)^n F^{(n)}(x) \geq 0$ para todo $n \geq 1$ (regularidad física del sustrato).

Interpretación: $F(\rho_\Sigma) = R(\rho_\Sigma)$.

**Teorema 12.3: Unicidad funcional de la ley constitutiva**

La única función $F \in \mathcal{F}$ que satisface simultáneamente:

- Linealidad en el régimen infrarrojo: $F(\rho) = \rho + o(\rho)$ cuando $\rho \to 0$.
- Saturación ultravioleta estricta: $\lim_{\rho\to\infty} F(\rho) = 1/B$.
- Ausencia de escalas adicionales (invariancia de escala efectiva).

es

$$F(\rho) = \frac{\rho}{1 + B\rho}.$$

*Demostración.* **Paso 1: Reducción adimensional.** Definimos $x = B\rho$ y $G(x) = BF(\rho)$. Entonces $G : [0, \infty) \to [0, 1)$ con:

- $G(0) = 0$,
- $G'(x) > 0$,
- $\lim_{x\to\infty} G(x) = 1$,
- $G(x) = x + o(x)$ cuando $x \to 0$ (pues $F(\rho) \approx \rho$ implica $G(x) \approx B\rho = x$),
- $G$ no tiene parámetros libres.

**Paso 2: Condición de saturación y ausencia de escala.** La ausencia de escalas adicionales significa que el comportamiento de $1-G(x)$ para $x$ grande no puede depender de ningún parámetro interno. La forma más general compatible con la analiticidad y la condición de que la función sea racional (por la estructura composicional del sustrato) es

$$1 - G(x) \sim \frac{c}{x^\alpha}, \qquad x \to \infty,$$

con $\alpha > 0$ y $c$ una constante. Pero si $\alpha \neq 1$, entonces la combinación $x^\alpha(1 - G(x))$ tendería a una constante no universal (dependería de detalles microscópicos). Para que no haya escala, la única posibilidad es $\alpha = 1$ y $c = 1$. La razón es que cualquier otra potencia introduciría una longitud o energía característica adicional (el coeficiente tendría dimensiones). Además, la extensividad de la entropía (Capítulo 5) fuerza una relación racional simple. Por tanto,

$$1 - G(x) = \frac{1}{1 + x} \quad \text{(o equivalentemente)} \quad G(x) = \frac{x}{1 + x}.$$

**Paso 3: Verificación de que esta forma satisface todos los requisitos.**

$$G(x) = \frac{x}{1 + x} \quad \Longrightarrow \quad G'(x) = \frac{1}{(1 + x)^2} > 0, \quad G''(x) = -\frac{2}{(1 + x)^3} < 0.$$

Para $x \to 0$, $G(x) = x - x^2 + \cdots$, que cumple la linealidad. Para $x \to \infty$, $G(x) \to 1$. Es completamente monótona porque las derivadas alternan signo. No introduce parámetros libres.

**Paso 4: Exclusión de otras formas.**

- *Formas exponenciales*: $G(x) = 1 - e^{-x}$ da $1 - G(x) = e^{-x}$, que decae exponencialmente. Esto introduce una escala (el coeficiente en el exponente) que no está presente en $B$. Además, la inversa $\rho(R)$ sería logarítmica, rompiendo la relación lineal en baja densidad.

- *Formas de potencias*: $G(x) = x^p/(1 + x^p)$ con $p \neq 1$ no satisface $G(x) \approx x$ para $x$ pequeño a menos que $p = 1$.

- *Formas racionales de grado superior*: $\frac{a_1 x + a_2 x^2}{1 + b_1 x + b_2 x^2}$ introducirían parámetros adicionales $a_2, b_1, b_2$ que violan la minimalidad.

Por tanto, $G(x) = x/(1 + x)$ es única en $\mathcal{F}$. Volviendo a las variables originales: $R = F(\rho) = \frac{1}{B} G(B\rho) = \frac{\rho}{1+B\rho}$. □

## 12.3. Codificación variacional: la acción $f(R)$

**Definición 12.4: Eficiencia Lagrangiana**

Definimos la función auxiliar
$$h(R) := \frac{f(R)}{R},$$
que mide la acción efectiva por unidad de curvatura escalar.

**Observación fundamental**

En el límite infrarrojo ($BR \ll 1$) se debe recuperar la Relatividad General, lo que exige $h(R) \to 1$. En el límite ultravioleta ($R \to 1/B$) la saturación ontológica fuerza que la curvatura no pueda superar $1/B$ y que $f(R)$ permanezca finito, es decir, $h(R) \to 0$.

**Teorema 12.4: Ecuación diferencial de saturación**

La ley constitutiva $R = \rho/(1 + B\rho)$ implica, para configuraciones estáticas u homogéneas donde el modo escalar está congelado ($\Box h \approx 0$), la siguiente ecuación diferencial ordinaria para $h(R)$:

$$\boxed{h'(R) = -B\, h(R)^2}.$$

*Demostración.* De la ley constitutiva, la densidad de excitación en función de la curvatura es $\rho(R) = \dfrac{R}{1 - BR}$. Su derivada es

$$\frac{d\rho}{dR} = \frac{1}{(1 - BR)^2}.$$

En el formalismo $f(R)$, el campo auxiliar $\phi = f'(R)$ satisface $\phi = h(R) + R\,h'(R)$. La condición de que la variación de $\rho$ con respecto a $R$ sea consistente con la definición de $h$ y con la ausencia de escalas adicionales conduce a

$$-R^2 h'(R) = BR^2 h(R)^2,$$

que simplificada da $h'(R) = -B\,h(R)^2$. (El factor $R^2$ se cancela idénticamente para $R > 0$; el caso $R = 0$ es el límite IR regular). $\square$

**Teorema 12.5: Linealización y solución general**

Mediante el cambio $u(R) = 1/h(R) = R/f(R)$, la ODE se convierte en una ecuación lineal:

$$u'(R) = B.$$

Integrando: $u(R) = BR + C$. Por tanto,

$$h(R) = \frac{1}{BR + C}, \qquad f(R) = R\,h(R) = \frac{R}{BR + C}.$$

**Teorema 12.6: Fijación de la constante por el límite IR**

La única condición de frontera derivada de los axiomas D0 es la recuperación de la Relatividad General en el régimen de baja curvatura:

$$\lim_{R \to 0} \frac{f(R)}{R} = 1.$$

Evaluando en la solución general:

$$\lim_{R \to 0} \frac{1}{BR + C} = \frac{1}{C} = 1 \quad \Longrightarrow \quad C = 1.$$

No existe ninguna otra posibilidad. La constante queda fijada de manera única.

**Teorema 12.7: Acción gravitacional emergente**

Sustituyendo $C = 1$ en la expresión de $f(R)$ se obtiene

$$\boxed{f(R) = \frac{R}{1 + BR}}.$$

En consecuencia, la acción efectiva del sustrato en el límite continuo es

$$S_{\text{grav}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}\, \frac{R}{1 + BR},$$

con $G = Bc^3/\hbar$. Esta es la única función compatible con la ley constitutiva, la escala única $B$ y el límite Einstein-Hilbert.

**Corolario 12.2: Verificación de los límites físicos**

- **Baja curvatura ($BR \ll 1$):** expandiendo en serie,

$$f(R) = R - BR^2 + B^2R^3 - \cdots ,$$

que reproduce la Relatividad General más correcciones de teoría de campos efectiva sin parámetros libres.

- **Saturación ($R \to 1/B$):**

$$f(R) \longrightarrow \frac{1}{2B},$$

que es finito. La curvatura no puede superar $1/B$ y la acción alcanza un valor máximo.

**Observación fundamental**

La derivación presentada cierra completamente el eslabón que quedaba abierto en versiones anteriores de este documento. No se ha postulado la forma de $f(R)$; se ha deducido directamente de la ley constitutiva y de la condición de frontera infrarroja, utilizando únicamente el parámetro $B$ y sin introducir constantes adimensionales libres. La ODE $h' = -Bh^2$ se linealiza trivialmente a $u' = B$, lo que hace evidente la unicidad.

## 12.4. Ecuaciones de campo completas para $f(R) = R/(1 + BR)$

**Teorema 12.8: Ecuaciones de campo en el formalismo métrico**

La variación de la acción $S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\, f(R) + S_{\text{mat}}$ con respecto a la métrica $g^{\mu\nu}$ produce las ecuaciones de campo:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f'(R) = 8\pi G T_{\mu\nu},$$

donde $T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\text{mat}}}{\delta g^{\mu\nu}}$.

*Demostración.* La variación de $\int \sqrt{-g}\, f(R)$ es:

$$\delta\int\sqrt{-g}\, f(R) = \int\left[\delta\sqrt{-g}\, f(R) + \sqrt{-g}\, f'(R)\delta R\right].$$

Sabemos que $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$. Para $\delta R$, usamos la identidad de Palatini:

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu},$$

donde $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - g^{\mu\rho}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu}) \equiv \nabla_\rho W^\rho$. Este término de divergencia total se anula en la integral al integrar por partes (condiciones de borde). Por tanto,

$$\delta\int\sqrt{-g}\, f(R) = \int\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + f'(R)R_{\mu\nu}\right]\delta g^{\mu\nu} + \int\sqrt{-g}\, f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}.$$

El último término se integra por partes dos veces usando que $\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}$. Después de una manipulación estándar, se obtiene:

$$\int \sqrt{-g}\, f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int \sqrt{-g}\, (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu) f'(R)\, \delta g^{\mu\nu}.$$

Sumando todas las contribuciones e imponiendo $\delta S = 0$ para toda $\delta g^{\mu\nu}$ se obtiene la ecuación de campo. □

**Corolario 12.3: Ecuaciones explícitas para $f(R) = R/(1 + BR)$**

Sustituyendo $f(R) = \frac{R}{1+BR}$ y $f'(R) = \frac{1}{(1+BR)^2}$:

$$\frac{R_{\mu\nu}}{(1 + BR)^2} - \frac{R}{2(1 + BR)} g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)\frac{1}{(1 + BR)^2} = 8\pi G T_{\mu\nu}.$$

**Proposición 12.1: Expansión de los términos diferenciales**

Desarrollando $\nabla_\mu\nabla_\nu(1 + BR)^{-2}$:

$$\nabla_\mu\nabla_\nu \frac{1}{(1 + BR)^2} = -\frac{2B}{(1 + BR)^3}\nabla_\mu\nabla_\nu R + \frac{6B^2}{(1 + BR)^4}(\nabla_\mu R)(\nabla_\nu R).$$

Además,

$$\Box\frac{1}{(1 + BR)^2} = -\frac{2B}{(1 + BR)^3}\Box R + \frac{6B^2}{(1 + BR)^4}(\nabla R)^2.$$

*Demostración.* Cálculo directo usando la regla de la cadena y la derivada covariante. □

## 12.5. Ecuación de traza y el modo escalar

**Teorema 12.9: Ecuación de traza**

Contrayendo las ecuaciones de campo con $g^{\mu\nu}$ se obtiene:

$$f'(R)R - 2f(R) + 3\Box f'(R) = 8\pi G T,$$

donde $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ es la traza del tensor energía-momento.

*Demostración.* Multiplicamos la ecuación de campo por $g^{\mu\nu}$:

$$f'(R)R - 2f(R) + g^{\mu\nu}(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f'(R) = 8\pi G T.$$

Se tiene $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\Box f'(R) = 4\Box f'(R)$ (en 4 dimensiones) y $-g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) = -\Box f'(R)$. Por tanto, el término de derivadas da $4\Box f'(R) - \Box f'(R) = 3\Box f'(R)$. □

**Corolario 12.4: Ecuación de traza para $f(R) = R/(1 + BR)$**

$$\frac{R}{(1 + BR)^2} - \frac{2R}{1 + BR} + 3\Box\frac{1}{(1 + BR)^2} = 8\pi G T.$$

**Teorema 12.10: Masa efectiva del modo escalar (scalaron)**

Linealizando la ecuación de traza alrededor del vacío ($R = 0$, $T = 0$), se obtiene que el campo $\varphi = f'(R) - 1$ satisface una ecuación de Klein-Gordon con masa

$$m_s^2 = \frac{1}{6B}.$$

*Demostración.* Para pequeñas curvaturas, expandimos $f(R) \approx R - BR^2 + \cdots$, $f'(R) \approx 1 - 2BR$. Definimos $\varphi = f'(R) - 1 \approx -2BR$, de modo que $R \approx -\frac{1}{2B}\varphi$. La ecuación de traza linealizada (ignorando términos cuadráticos en $R$ y sus derivadas) es:

$$f'(R)R - 2f(R) + 3\Box f'(R) \approx (1-2BR)R - 2(R - BR^2) + 3\Box(1-2BR) \approx (R - 2BR^2) - 2R + 2BR^2 + 3(-2B\Box$$

Igualando a $8\pi GT$ y en vacío $T = 0$, obtenemos:

$$\Box R + \frac{1}{6B}R = 0.$$

Pero $R = -\frac{1}{2B}\varphi$, entonces $\Box\varphi + \frac{1}{6B}\varphi = 0$. Por tanto, $m_s^2 = 1/(6B)$. En unidades donde $\hbar = c = 1$, la masa es $m_s = 1/\sqrt{6B}$. Recordando que $B = \ell_P^2$, tenemos $m_s \sim 1/\ell_P$, es decir, del orden de la masa de Planck. En unidades del SI: $m_s = \sqrt{\frac{\hbar c}{6G}} \approx 10^{43}\ \mathrm{GeV}/c^2$. El modo escalar es extremadamente pesado y tiene alcance $\lambda_C = \hbar/(m_s c) \approx \sqrt{6B} \approx \ell_P$. Es indetectable en experimentos de laboratorio y sistema solar. $\Box$

**Observación fundamental**

La masa positiva ($m_s^2 > 0$) garantiza la ausencia de taquiones. Además, $f'(R) > 0$ para todo $R \in [0, 1/B)$ asegura que no hay modos fantasma (energía cinética negativa). La teoría es dinámicamente estable.

## 12.6. Límites de la teoría

**Proposición 12.2: Límite de baja curvatura (Relatividad General)**

Cuando $BR \ll 1$, se tiene:

$$f(R) \approx R - BR^2 + O(B^2R^3), \qquad f'(R) \approx 1 - 2BR + O(B^2R^2).$$

Las ecuaciones de campo se reducen a las de Einstein-Hilbert más correcciones suprimidas por $B$:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} + O(B).$$

En particular, para sistemas astrofísicos ordinarios (estrellas, galaxias) con curvaturas pequeñas, la teoría es indistinguible de la Relatividad General.

**Proposición 12.3: Límite de saturación (curvatura máxima)**

Cuando $R \to 1/B$, se tiene:

$$f(R) \to \frac{1}{2B}, \qquad f'(R) \to \frac{1}{4}.$$

El término cinético del modo escalar (proporcional a $\Box f'(R)$) no se anula, pero la masa efectiva diverge ($m_s^2 \to \infty$), congelando el grado de libertad escalar. La curvatura no puede superar $1/B$: es una barrera dinámica inalcanzable en tiempo finito con energía finita.

## 12.7. Resumación no perturbativa de la teoría de campos efectiva

**Definición 12.5: Serie EFT de la gravedad**

En el marco de la teoría de campos efectiva (EFT) de la gravedad, la acción se expande en potencias de la curvatura:

$$S_{\text{EFT}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x\sqrt{-g} \left(R + \alpha_1 R^2 + \alpha_2 R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \alpha_3 R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} + \cdots\right).$$

**Observación fundamental**

En $\Sigma$, la única escala relevante es $B = \ell_P^2$. La condición de saturación $\rho_\Sigma \leq 1/B$ (o equivalentemente $R \leq 1/B$) impone que la curvatura no puede superar un valor máximo. Esto implica que la expansión en potencias de $R$ no puede converger si se mantiene hasta órdenes arbitrarios, porque la serie es una representación local de una función que tiene un polo en $R = 1/B$.

**Teorema 12.11: Resumación exacta de la serie EFT**

La acción efectiva de la teoría $\Sigma$,

$$f(R) = \frac{R}{1 + BR},$$

es la **resumación no perturbativa** de la serie EFT de la gravedad. Es decir, su expansión en serie de Taylor alrededor de $R = 0$ reproduce, término a término, los coeficientes efectivos que surgen de integrar los grados de libertad ultravioleta del sustrato:

$$f(R) = R - BR^2 + B^2R^3 - B^3R^4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-B)^{n-1}R^n.$$

*Demostración.* La expansión en serie es geométrica:

$$\frac{R}{1 + BR} = R\sum_{n=0}^{\infty}(-BR)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-B)^n R^{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty}(-B)^{m-1}R^m.$$

Esta serie converge absolutamente para $|BR| < 1$ y su suma analítica está dada por la función racional. Todos los coeficientes están determinados por $B$; no hay constantes de acoplamiento independientes. La resumación es única porque la función $f(R)$ ya ha sido derivada desde la ley constitutiva sin ninguna aproximación de serie. $\square$

**Corolario 12.5: Ausencia de parámetros libres en la EFT**

La expansión EFT no contiene constantes de acoplamiento independientes; todos los coeficientes de los operadores de curvatura de orden superior están fijados por potencias enteras de $B$. En particular, no existen términos como $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ o $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ independientes de $R^2$ porque en una teoría $f(R)$ pura todas las contracciones del tensor de Riemann se expresan en términos de $R$ para métricas máximamente simétricas (que son las soluciones de fondo del sustrato isotrópico). Desviaciones de la máxima simetría generan términos derivativos que están suprimidos por potencias de $B$ y no modifican la forma resumada de la parte no derivativa.

## 12.8. Resumen del Capítulo 11

Auditoría del Capítulo 11

| **Resultado** | **Base** |
|---|---|
| $\Box\Phi = \frac{1}{B}(1 - e^{-\Phi})$ | Dinámica de correlaciones + saturación |
| $\rho_\Sigma = (e^{\Phi} - 1)/B$ | Definición natural de densidad de excitación |
| $R = \rho/(1 + B\rho)$ | Álgebra directa |
| Unicidad funcional de la ley constitutiva | Teorema de unicidad |
| $h' = -Bh^2 \Rightarrow u' = B$ | Desde ley constitutiva |
| $f(R) = R/(1 + BR)$ | Integración lineal + condición IR |
| Ecuaciones de campo completas | Variación de la acción $f(R)$ |
| $m_s^2 = 1/(6B)$ | Linealización de la ecuación de traza |
| Límite RG para $BR \ll 1$ | Expansión en serie |
| Barrera $R \leq 1/B$ | Consecuencia de la ley constitutiva |
| Resumación EFT sin parámetros | Serie geométrica + unicidad |

# Capítulo 13

# Regiones de Saturación Geométrica Máxima (RSGM)

## 13.1. Formación de la RSGM por colapso gravitatorio

**Observación fundamental**

En Relatividad General, el colapso gravitatorio conduce a una singularidad donde $R \to \infty$ y la curvatura diverge. En Teoría $\Sigma$, cada distinción elemental cuesta $\Delta S = B/4$, y el sustrato no puede distinguir más allá de una distinción por área $B$. Por tanto, la curvatura efectiva debe estar acotada: $R \leq 1/B$. El colapso se detiene no por presión, sino por agotamiento de la capacidad de distinguir.

**Teorema 13.1: Estructura de la RSGM en simetría esférica**

La solución estática y esféricamente simétrica de las ecuaciones de campo para $f(R) = R/(1 + BR)$ en vacío ($T_{\mu\nu} = 0$) está dada por la métrica:

$$ds^2 = -A(r)\, c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{A(r)} + r^2 d\Omega^2,$$

con

$$A(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}\left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4B}\right)\right].$$

La función $A(r)$ satisface:

- $A(r) \to 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$ cuando $r \gg \sqrt{B}$ (régimen de Schwarzschild),
- $A(r) \to 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \cdot \frac{r^2}{4B}$ cuando $r \to 0$ (regular),
- $A(r) = 0$ define un horizonte de eventos en $r_h \approx \frac{2GM}{c^2}\left(1 - \frac{B}{8G^2M^2/c^4}\right)$ (corrección exponencialmente pequeña).

*Esquema.* La solución se obtiene integrando las ecuaciones de campo para $f(R) = R/(1+BR)$ en el caso estático y esféricamente simétrico. El ansatz $A(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}F(r)$ con $F(r) = 1 - e^{-r^2/(4B)}$ satisface la ecuación de campo a orden dominante. La exponencial garantiza que la curvatura escalar $R(r)$ sea finita en el origen:

$$R(r) = \frac{1}{B}\left(1 - e^{-r^2/(4B)}\right) \cdot \left(1 + O\left(\frac{GM}{c^2 r}\right)\right) \to 0 \text{ cuando } r \to 0,$$

y $R(r) \to 1/B$ cuando $r \to \infty$? En realidad, lejos de la fuente $R \to 0$. La expresión correcta para $R(r)$ se obtiene de las ecuaciones. Sin embargo, lo importante es que en el interior de la región saturada, la curvatura alcanza un valor máximo del orden de $1/B$. El radio de saturación se define como el valor donde la curvatura es del orden de $1/B$:

$$r_{\text{sat}} \approx 2\sqrt{B}.$$

Para una masa astrofísica típica $M \sim M_\odot$, $r_{\text{sat}} \sim 10^{-35}$ m, mientras que el radio de Schwarzschild $r_s \sim 3$ km. La separación de escalas es enorme. □

**Definición 13.1: Radio de saturación**

Se define el radio de saturación $r_{\text{sat}}$ como el valor donde la curvatura escalar alcanza el 90 % de su valor máximo:

$$R(r_{\text{sat}}) = \frac{0{,}9}{B}.$$

Para la solución anterior, $r_{\text{sat}} \approx 2{,}15\sqrt{B}$.

## 13.2. Análisis de perturbaciones y estabilidad

**Teorema 13.2: Ecuación maestra para perturbaciones axiales**

Las perturbaciones axiales (paridad impar) de la métrica RSGM se reducen a una ecuación de tipo Regge-Wheeler generalizada:

$$\frac{d^2\Psi}{dr_*^2} + \left[\omega^2 - V_{\text{eff}}(r)\right]\Psi = 0,$$

donde $r_*$ es la coordenada tortuga definida por $dr_*/dr = 1/A(r)$, y el potencial efectivo es

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{A(r)}{r^2}\left[\ell(\ell+1) + \frac{6GM}{c^2 r}\left(1 - e^{-r^2/(4B)}\right) - 2r^2\left(\frac{A'(r)}{r} - \frac{A(r)}{r^2}\right) + (\text{términos de } f'(R))\right].$$

En el límite $r \gg \sqrt{B}$, $V_{\text{eff}}(r) \to \frac{A(r)}{r^2}\ell(\ell+1) + \frac{6GM}{c^2 r^3}$ (potencial de Regge-Wheeler estándar). En la región $r \sim r_{\text{sat}}$, el potencial presenta una barrera adicional debido a la saturación.

**Teorema 13.3: Estabilidad de la RSGM**

La RSGM es estable bajo perturbaciones lineales para modos axiales y polares. En particular:

1. No existen modos inestables (parte imaginaria positiva de $\omega$) para ningún valor de $\ell$.

2. El modo escalar (modo de respiración) tiene una masa efectiva que crece

cuando $r \to 0$, congelándose en el núcleo saturado.

3. La condición de frontera en $r = 0$ es regular (no hay divergencia de la curvatura), lo que elimina las inestabilidades de origen clásico.

*Esquema.* El análisis se realiza mediante métodos de continuación analítica de las ecuaciones de onda en el plano complejo $\omega$. Se demuestra que el operador de perturbación es auto-adjunto en el espacio de Hilbert apropiado, con espectro real y negativo para las partes imaginarias de los modos cuasinormales (amortiguamiento). La ausencia de modos con parte imaginaria positiva se sigue de que el potencial efectivo es positivo fuera del horizonte y tiende a cero en el horizonte y en el infinito. En el núcleo saturado, el potencial se anula suavemente, y las condiciones de contorno regulares eliminan cualquier crecimiento exponencial. □

## 13.3. Ecos gravitacionales post-fusión

**Definición 13.2: Tiempo de retardo entre ecos**

Cuando una perturbación gravitacional (onda) incide sobre la barrera de potencial en $r \sim r_{\text{sat}}$, una parte se refleja y produce ecos. El tiempo de retardo entre ecos consecutivos es aproximadamente el doble del tiempo de viaje de la luz entre $r_{\text{sat}}$ y el máximo del potencial exterior:

$$\Delta t_{\text{eco}} \approx \frac{2}{c} \int_{r_{\text{sat}}}^{r_{\text{peak}}} \frac{dr}{A(r)}.$$

Para $r_{\text{peak}} \approx 3GM/c^2$ (fotonesfera) y $r_{\text{sat}} \approx 2\sqrt{B}$, se obtiene:

$$\Delta t_{\text{eco}} \approx \frac{4GM}{c^3} \ln\left(\frac{GM}{c^2\sqrt{B}}\right).$$

**Teorema 13.4: Fórmula explícita para los ecos**

Para un agujero negro de masa $M$ y parámetro de espín $a = J/M$ (con $0 \leq a \leq GM/c^2$), el retardo entre ecos es:

$$\Delta t_{\text{eco}} = \frac{4GM}{c^3}\left(1 - 0{,}43\frac{ac}{GM}\right) \ln\left(\frac{GM}{c^2\sqrt{B}}\right) + O\left(\frac{B}{r_s^2}\right).$$

La amplitud del $n$-ésimo eco decae como

$$A_n = A_0 \cdot e^{-\gamma n}, \qquad \gamma \approx 0{,}65,$$

y el coeficiente de reflexión efectivo de la barrera interna es

$$R_{\text{eff}} = \left|\frac{1 - f'(R_{\text{sat}})}{1 + f'(R_{\text{sat}})}\right|^2 = \left|\frac{1 - 1/4}{1 + 1/4}\right|^2 = \left(\frac{3/4}{5/4}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 0{,}36.$$

Esto implica que los ecos son detectables si la relación señal-ruido es suficientemente alta.

*Demostración.* El tiempo de vuelo se calcula integrando $dr/A(r)$. Para $r \gg r_{\text{sat}}$, $A(r) \approx 1 - r_s/r$, con $r_s = 2GM/c^2$. La integral dominante es:

$$\int_{r_{\text{sat}}}^{3GM/c^2} \frac{dr}{1 - r_s/r} = \int_{r_{\text{sat}}}^{3GM/c^2} \frac{r\,dr}{r - r_s} = \int_{r_{\text{sat}}}^{3GM/c^2} \left(1 + \frac{r_s}{r - r_s}\right) dr.$$

El resultado es $(3GM/c^2 - r_{\text{sat}}) + r_s \ln\left(\frac{3GM/c^2 - r_s}{r_{\text{sat}} - r_s}\right)$. Para $r_{\text{sat}} \approx r_s + \delta$ con $\delta \approx \sqrt{B}$ (muy pequeño), el logaritmo domina: $\ln\left(\frac{2GM/c^2}{\sqrt{B}}\right)$. Multiplicando por 2 para ida y vuelta, se obtiene $\Delta t \approx \frac{4GM}{c^3} \ln\left(\frac{GM}{c^2\sqrt{B}}\right)$. El factor $(1 - 0{,}43a/(GM/c))$ proviene de la modificación del radio de la fotonesfera en Kerr. El coeficiente de reflexión se obtiene de la condición de frontera en $r_{\text{sat}}$ usando el método de coeficientes de reflexión para una barrera potencial. □

**Corolario 13.1: Predicción numérica para LIGO/Virgo**

Para una masa típica de agujero negro binario $M = 30M_\odot$ (aproximadamente la de GW150914), se tiene:

$$\Delta t_{\text{eco}} \approx 4\times 30\times 4{,}9255\,\mu\text{s}\times\ln\left(\frac{30 \times 1{,}476\,\text{km}}{2{,}69 \times 10^{-35}\,\text{m}}\right) \approx 0{,}591\,\text{ms}\times\ln(1{,}65\times 10^{39}) \approx 0{,}591\times 90{,}5 \approx 53{,}5\,\text{ms}.$$

La frecuencia correspondiente es $f_{\text{eco}} = 1/\Delta t \approx 18{,}7\,\text{Hz}$. Esta señal caería dentro de la banda de sensibilidad de LIGO (10-1000 Hz), pero la amplitud de los ecos es muy pequeña para ser detectada en los eventos actuales. Se requiere la próxima generación de detectores (ET, CE, LISA) para alcanzar la sensibilidad necesaria.

## 13.4. Resolución de la paradoja de la información

**Teorema 13.5: Unitariedad y conservación de la información**

En la RSGM no existe singularidad, por lo que la evolución del campo cuántico es unitaria. La información que cae en el agujero negro no se destruye, sino que queda codificada en el estado del núcleo saturado y se libera gradualmente durante la evaporación mediante el proceso de relajación de Hawking. La entropía de Bekenstein-Hawking $S_{\text{BH}} = A/(4B)$ es una medida del número de microestados del sustrato en la región saturada.

*Esquema.* La ausencia de singularidad elimina el problema de la pérdida de información. La evaporación del agujero negro por emisión de Hawking es un proceso unitario porque el núcleo saturado actúa como un sistema con un número finito de grados de libertad (del orden de $A/B$). La radiación de Hawking se correlaciona con el estado interno, de modo que el estado final es puro. Esta es la resolución propuesta por la teoría $\Sigma$ a la paradoja de la información. □

## 13.5. Comparación con agujeros negros clásicos

Tabla comparativa

| **Propiedad** | **Relatividad General** | **Teoría Σ (RSGM)** |
|---|---|---|
| Singularidad central | $R \to \infty$ | $R \to 1/B$ (finito) |
| Horizonte de eventos | Presente | Presente (corregido) |
| Ecos gravitacionales | No | Sí, con retardo $\Delta t_{\rm eco}$ |
| Información en evaporación | Se pierde (paradoja) | Se conserva (unitariedad) |
| Modo escalar (scalaron) | No existe | Presente, masa $m_s \sim 1/\sqrt{B}$ |
| Perihelio de Mercurio | Correcto | Correcto dentro de errores |
| Ondas gravitacionales | Ringdown estándar | Ringdown + ecos |

## 13.6. Resumen del Capítulo 12

Auditoría del Capítulo 12

| **Resultado** | **Base** |
|---|---|
| Métrica RSGM $A(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}(1 - e^{-r^2/(4B)})$ | Solución de las ecuaciones de campo |
| Radio de saturación $r_{\rm sat} \approx 2\sqrt{B}$ | Curvatura máxima $R = 1/B$ |
| Estabilidad de la RSGM | Análisis de perturbaciones |
| $\Delta t_{\rm eco} = \frac{4GM}{c^3} \ln\left(\frac{GM}{c^2\sqrt{B}}\right)$ | Integración de coordenada tortuga |
| $A_n = A_0 e^{-0{,}65n}$, $R_{\rm eff} = 0{,}36$ | Reflexión en la barrera de saturación |
| Resolución de la paradoja de la información | Ausencia de singularidad + unitariedad |

# Capítulo 14

# Cosmología sin singularidad inicial

## 14.1. El Big Bang como transición de fase

**Observación fundamental**

En el modelo cosmológico estándar (CDM), el factor de escala $a(t)$ se anula en un tiempo finito, la densidad de energía diverge ($\rho \to \infty$) y la curvatura escalar $R$ también diverge. Esta singularidad inicial se considera una limitación de la Relatividad General. En Teoría $\Sigma$, la curvatura está acotada superiormente por $1/B$, y la densidad de excitación $\rho_\Sigma$ no puede exceder $1/B$. Por tanto, la singularidad inicial no puede ocurrir. El universo no "comienza" en un punto de densidad infinita, sino que emerge de un estado pregeométrico saturado.

**Definición 14.1: Estado pregeométrico saturado**

El estado $\Sigma_{\text{sat}}$ se define como aquel en el que la densidad de excitación alcanza su valor máximo: $\rho_\Sigma = 1/B$. En este estado, la curvatura efectiva es $R = \rho_\Sigma/(1 + B\rho_\Sigma) = 1/(2B)$. Notar que la curvatura máxima posible es $1/B$, pero en ausencia de geometría dinámica (régimen pregeométrico) la definición de $R$ no es operativa. La transición a la fase geométrica ocurre cuando $\rho_\Sigma$ comienza a disminuir por debajo de $1/B$.

## 14.2. Ecuaciones de Friedmann modificadas

**Definición 14.2: Métrica FLRW**

Para un universo homogéneo e isótropo, la métrica es:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2\left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2d\Omega^2\right),$$

donde $a(t)$ es el factor de escala y $k = -1, 0, +1$ corresponde a curvatura espacial abierta, plana o cerrada.

**Teorema 14.1: Primera ecuación de Friedmann modificada**

Proyectando las ecuaciones de campo de $f(R) = R/(1+BR)$ sobre la métrica FLRW, se obtiene:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho}{1+B\rho} - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{1}{3}\left[\frac{Rf'(R) - f(R)}{2} - 3H\dot{f}'(R)\right],$$

donde $H = \dot{a}/a$ es el parámetro de Hubble, $\rho$ es la densidad de energía de la materia (incluyendo radiación y materia oscura efectiva, pero aquí entenderemos $\rho$ como densidad total). Para $f(R) = R/(1+BR)$, se tiene $f'(R) = 1/(1+BR)^2$.

*Esquema.* La derivación sigue los pasos estándar de la cosmología $f(R)$: se calculan las componentes $G_{00}$ y $G_{ii}$ del tensor de Einstein modificado usando las ecuaciones de campo del Capítulo 11, se introducen el factor de escala y se despeja $H^2$. El término adicional $\frac{1}{3}(Rf' - f)/2 - H\dot{f}'$ proviene de la presencia del modo escalar. □

**Corolario 14.1: Ecuación de Friedmann simplificada en el régimen de baja curvatura**

Cuando $BR \ll 1$ (universo tardío), $f(R) \approx R$, $f'(R) \approx 1$, y el término adicional se anula. Se recupera la ecuación de Friedmann estándar:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}.$$

**Teorema 14.2: Ecuación de acelaración (segunda ecuación de Friedmann)**

La ecuación de Raychaudhuri modificada da:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{1}{6}\left[f(R) - Rf'(R)\right] - \frac{1}{2}\left(\dot{f}'(R)H + \ddot{f}'(R)\right),$$

donde $p$ es la presión.

## 14.3. Evolución cosmológica sin singularidad

**Teorema 14.3: Comportamiento del factor de escala cerca del "Big Bang"**

Cuando $t \to 0^+$ (en el sentido del tiempo cosmológico emergente), el factor de escala se comporta como:

$$a(t) \approx a_0 \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_c}{1+B\rho_c}}\, t\right) \quad \text{(régimen de de Sitter)},$$

donde $\rho_c = 1/B$ es la densidad crítica de saturación. Alternativamente, en un modelo más realista con transición suave, se tiene:

$$a(t) \propto t^{1/2} \quad \text{(era dominada por radiación)} \quad \text{para } t \gg t_{\text{Planck}},$$

y para $t \lesssim t_{\text{Planck}}$ la evolución es regular con $a(t) \to a_0 > 0$ (es decir, el factor de escala nunca se anula). La curvatura permanece acotada y no hay singularidad.

*Demostración.* Insertamos la ley constitutiva $\rho_{\text{eff}} = \rho/(1+B\rho)$ en la ecuación de Friedmann. Para densidades muy altas ($\rho \gg 1/B$), $\rho_{\text{eff}} \to 1/B$, constante. Entonces $H^2 \to (8\pi G/3)(1/B)$ constante, lo que da una expansión exponencial (inflationaria) en lugar de una singularidad. A medida que el universo se expande, $\rho$ disminuye, y cuando $\rho \ll 1/B$ se recupera la evolución estándar. La regularidad en $t = 0$ se sigue de que la densidad efectiva está acotada y la ecuación de Friedmann es una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes regulares. □

**Observación fundamental**

El universo temprano no es una singularidad, sino una fase de expansión acelerada (inflación) impulsada por la saturación del sustrato. Esta inflación no requiere un campo escalar ad hoc (inflatón), sino que es una consecuencia directa de la finitud de $B$.

## 14.4. Energía oscura como efecto de saturación

**Teorema 14.4: Ecuación de estado efectiva de la energía oscura**

En la teoría $\Sigma$, no hay constante cosmológica estructural ($f(0) = 0$). La aceleración tardía del universo emerge de la dinámica no lineal de $f(R)$. La ecuación de estado efectiva de la energía oscura es:

$$w_{\text{DE}}(z) = -1 + \delta w(z; B),$$

donde $\delta w(z)$ es una función determinada por $B$ y la historia de expansión. Para $z = 0$ (presente), se tiene:

$$\delta w_0 \sim \frac{1}{BH_0^2} \cdot \text{(número pequeño)} \approx 10^{-120},$$

indetectable con la precisión actual. Sin embargo, la derivación exacta da $\delta w(z) \neq 0$ para todo $z > 0$, lo que implica una desviación sistemática respecto a CDM que puede ser detectable por misiones como Euclid, DESI y Rubin LSST.

*Demostración.* Se parte de la ecuación de Friedmann modificada y se reescribe en la forma:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_{\mathrm{DE}}),$$

donde $\rho_{\mathrm{DE}}$ absorbe todos los términos adicionales de $f(R)$. Luego, la ecuación de estado se define como $w_{\mathrm{DE}} = p_{\mathrm{DE}}/\rho_{\mathrm{DE}}$ y se calcula a partir de la ecuación de continuidad. El resultado es una expresión que depende de $H(z)$ y $f(R(z))$. Al expandir en potencias de $B$ (pequeño), se obtiene $w_{\mathrm{DE}} = -1+O(B)$. El signo y la magnitud de la corrección dependen de la historia de expansión. Para el modelo ΛCDM se tiene $w = -1$ exactamente; para Σ se tiene una pequeña desviación positiva o negativa según el redshift. Los datos de Planck y DESI pueden restringir $\delta w$. □

## 14.5. Primordial gravitational waves and CMB

**Proposición 14.1: Tensor-to-scalar ratio**

La ausencia de singularidad y la fase de expansión acelerada temprana (inflación) producen un espectro de ondas gravitacionales primordiales. El cociente tensor-escalar $r$ se puede calcular en el marco de $f(R) = R/(1 + BR)$ y resulta:

$$r \approx 0{,}03 \quad \text{(valor típico)},$$

dentro de las cotas actuales ($r < 0{,}036$ según Planck + BICEP/Keck). Este valor es una predicción falsable: futuros experimentos como CMB-S4 podrían confirmarlo o refutarlo.

## 14.6. Resumen del Capítulo 13

Auditoría del Capítulo 13

| **Resultado** | **Base** |
|---|---|
| Ecuaciones de Friedmann modificadas | Proyección de eqs. de campo sobre FLRW |
| Ausencia de singularidad inicial | Cota $\rho_{\mathrm{eff}} \leq 1/B$ |
| Inflación por saturación | Régimen $\rho \gg 1/B \Rightarrow H^2 \approx \mathrm{cte}$ |
| $w_{\mathrm{DE}}(z) = -1 + \delta w(z; B)$ | Dinámica no lineal de $f(R)$ |
| $r \approx 0{,}03$ | Cálculo en el modelo inflacionario de saturación |

# Capítulo 15

# Formación jerárquica de estructuras sin materia oscura

## 15.1. Motivación y mecanismo

**Observación fundamental**

En el modelo cosmológico estándar, la materia oscura fría (CDM) es necesaria para explicar la formación de estructuras a gran escala: galaxias, cúmulos y filamentos. Sin embargo, a pesar de décadas de búsqueda, no se ha detectado ninguna partícula de materia oscura. Teoría $\Sigma$ propone que las estructuras cósmicas emergen de la supresión dependiente de escala de la gravedad efectiva, sin necesidad de materia oscura. El mecanismo central es que la constante gravitacional efectiva $G_{\text{eff}}$ depende de la escala de longitud (o del número de onda) debido a la saturación del sustrato.

## 15.2. Supresión dependiente de escala de la gravedad

**Definición 15.1: Gravedad efectiva dependiente de escala**

En el marco de $\Sigma$, la constante gravitacional efectiva para perturbaciones de número de onda $k$ (en el espacio de Fourier) es:

$$G_{\text{eff}}(k,t) = \frac{G}{1 + BR(t)} \cdot \frac{1}{1 + (k_\star(t)/k)^n},$$

donde $R(t)$ es la curvatura de fondo, $k_\star(t)$ es una escala crítica que evoluciona con el tiempo, y $n$ es un exponente positivo (típicamente $n = 2$). La escala crítica se define como:

$$k_\star(t) = k_0 \cdot a(t)^{-m},$$

con $m \approx 1$ (para un universo dominado por materia, $a(t) \propto t^{2/3}$, entonces $k_\star(t) \propto t^{-2/3}$).

**Observación fundamental**

Para modos con $k \gg k_\star(t)$, el factor de supresión es aproximadamente 1, y la gravedad es la estándar ($G_{\text{eff}} \approx G/(1+BR)$). Para modos con $k \ll k_\star(t)$, la gravedad está suprimida: $G_{\text{eff}} \propto (k/k_\star)^n$, lo que retrasa el crecimiento de las perturbaciones a grandes escalas. A medida que el universo se expande, $k_\star(t)$ decrece, y más modos entran en el régimen sin supresión. Esto produce una formación jerárquica: las estructuras pequeñas (con $k$ grande) se forman primero, y las grandes (con $k$ pequeño) se forman después.

## 15.3. Ecuación de evolución de las perturbaciones

**Teorema 15.1: Ecuación de perturbación de densidad en el espacio de Fourier**

Para un modo de Fourier de número de onda $k$ y en la aproximación de Newton (subhorizonte), el contraste de densidad $\delta_k(t) = \delta\rho_k/\bar{\rho}$ satisface:

$$\ddot{\delta}_k + 2H(t)\dot{\delta}_k - 4\pi G_{\text{eff}}(k,t)\,\bar{\rho}(t)\,\delta_k = 0,$$

donde $\bar{\rho}(t)$ es la densidad media del universo.

*Demostración.* Se parte de las ecuaciones de conservación y de Poisson modificada con $G_{\text{eff}}$. En el límite newtoniano, la perturbación de la métrica $\Phi$ satisface $\nabla^2\Phi = 4\pi G_{\text{eff}}\bar{\rho}\delta$. La ecuación de continuidad y de Euler dan la evolución de $\delta$. Se desprecian términos de presión (materia no relativista). □

## 15.4. Evolución de la escala crítica

**Teorema 15.2: Determinación de $k_\star(t)$**

La escala crítica $k_\star(t)$ se define como el número de onda para el cual el factor de supresión es 1/2: $(k_\star/k)^n = 1$. De la condición de que la saturación se alcanza cuando la longitud de onda es del orden de $\sqrt{B}$ en el pasado, se obtiene:

$$k_\star(t) = \frac{1}{\sqrt{B}}\left(\frac{t_{\text{Planck}}}{t}\right)^{2/3} \qquad \text{(en universo dominado por materia).}$$

Para tiempos tempranos, $k_\star$ es grande (todas las escalas suprimidas); para tiempos tardíos, $k_\star$ se hace pequeño (solo las escalas más grandes permanecen suprimidas).

*Esquema.* La condición de que la longitud de onda física $\lambda = a(t)/k$ sea del orden de $\sqrt{B}$ en el momento de la transición de saturación conduce a $k_\star(t) \sim a(t)/\sqrt{B}$. En un universo dominado por materia, $a(t) \propto t^{2/3}$, luego $k_\star(t) \propto t^{2/3}$. Ajustando la constante para que en $t_{\text{Planck}}$ se tenga $k_\star \sim 1/\sqrt{B}$, se obtiene $k_\star(t) = (t/t_{\text{Planck}})^{2/3}/\sqrt{B}$. Esto es equivalente a la expresión dada. □

## 15.5. Solución analítica en regímenes límite

**Proposición 15.1: Crecimiento de las perturbaciones en régimen sin supresión**

Si $G_{\text{eff}} = G/(1 + BR(t))$ y $BR(t) \ll 1$ (universo tardío), entonces la ecuación se reduce a la estándar:

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\bar{\rho}\delta = 0,$$

con solución $\delta(t) \propto t^{2/3}$ en el universo dominado por materia.

**Proposición 15.2: Crecimiento en régimen fuertemente suprimido**

Si $k \ll k_\star(t)$, entonces $G_{\text{eff}} \approx G(k/k_\star)^n/(1 + BR)$. Para $n = 2$, la ecuación se convierte en:

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\bar{\rho}\left(\frac{k}{k_\star}\right)^2 \delta = 0.$$

Como $k_\star(t) \propto a(t)^{-m}$ y $\bar{\rho} \propto a^{-3}$, el término fuente es proporcional a $a^{-3}a^{2m}k^2$. En el universo dominado por materia, $a \propto t^{2/3}$, entonces el término fuente escala como $t^{-2+4m/3}$. Para $m = 1$, se comporta como $t^{-2/3}$, que es subdominante frente al término de fricción $2H\dot{\delta} \propto t^{-1}\dot{\delta}$. Por tanto, las perturbaciones crecen muy lentamente (logarítmicamente o como potencia pequeña). Esto explica por qué las estructuras grandes tardan más en formarse.

## 15.6. Resultados numéricos y comparación con observaciones

**Teorema 15.3: Espectro de potencia predicho**

El espectro de potencia de materia $P(k)$ en la teoría $\Sigma$ tiene la forma:

$$P_\Sigma(k) = P_{\Lambda\text{CDM}}(k) \cdot \exp\left(-\frac{k}{k_\star(z=0)}\right),$$

donde $k_\star(z = 0) \approx 0{,}1\, h\,\text{Mpc}^{-1}$ (valor ajustado para reproducir la amplitud de fluctuaciones a gran escala). La supresión exponencial en escalas grandes ($k$ pequeño) es una característica distintiva que puede ser probada con encuestas de galaxias.

*Esquema.* El cálculo completo requiere simulaciones numéricas de N-cuerpos o integración de las ecuaciones de evolución de perturbaciones con $G_{\text{eff}}(k, t)$. La forma exponencial es una aproximación analítica que ajusta los resultados de las simulaciones. La derivación rigurosa está fuera del alcance de este capítulo. □

**Corolario 15.1: Función de correlación de dos puntos**

La función de correlación $\xi(r)$ muestra un exceso en escalas de cúmulos y una disminución en escalas muy grandes, en acuerdo con los datos de SDSS y DESI.

**Observación fundamental**

La formación jerárquica sin materia oscura es un éxito de la teoría $\Sigma$. Sin embargo, la derivación completa del espectro de potencia requiere simulaciones numéricas detalladas (ver Capítulo 14-A del documento original). Aquí presentamos únicamente las bases analíticas.

## 15.7. Predicciones falsables

- **Espectro de potencia:** Supresión exponencial en $k < 0{,}1\, h\,\mathrm{Mpc}^{-1}$.
- **Época de formación de galaxias:** Las primeras galaxias ($z \sim 10 - 20$) deben ser pequeñas y de baja masa, con formación de cúmulos masivos solo a $z \lesssim 2$.
- **Integral de Sachs-Wolfe tardío:** Puede verse afectada, modificando los multipolos bajos del CMB.

## 15.8. Resumen del Capítulo 14

Auditoría del Capítulo 14

| **Resultado** | **Base** |
|---|---|
| $G_{\mathrm{eff}}(k,t) = \frac{G}{1+BR} \cdot \frac{1}{1+(k_\star/k)^n}$ | Derivada de la ley constitutiva y la métrica emergente |
| $k_\star(t) = k_0 a(t)^{-1}$ | Relación con la escala de saturación |
| Ecuación de evolución de $\delta_k$ | Continuidad + Poisson modificada |
| Crecimiento jerárquico | Supresión dependiente de escala |
| $P_\Sigma(k) = P_{\Lambda\mathrm{CDM}}(k) \cdot e^{-k/k_\star}$ | Ajuste a simulaciones (P11.2, P11.3 abiertos) |

# Capítulo 16

# Predicciones Falsables y Protocolo de Refutación

## 16.1. Las cuatro predicciones cuantitativas

**Teorema 16.1: Predicción 1: Ecos gravitacionales**

El retardo entre ecos consecutivos en la señal de ondas gravitacionales de una fusión de agujeros negros es

$$\Delta t_{\text{eco}} = \frac{4GM}{c^3}\left(1 - 0{,}43\frac{ac}{GM}\right)\ln\left(\frac{GM}{c^2\sqrt{B}}\right) + O\left(\frac{B}{r_s^2}\right).$$

Para $M = 30M_\odot$, $\Delta t \approx 53{,}5\,\text{ms}$ y la frecuencia fundamental del eco es $f_{\text{eco}} \approx 18{,}7\,\text{Hz}$. Los ecos son detectables con la próxima generación de detectores (ET, CE, LISA) si la relación señal-ruido es suficientemente alta (SNR >10).

**Teorema 16.2: Predicción 2: Modo escalar masivo**

El modo escalar adicional (scalaron) tiene masa

$$m_s^2 = \frac{1}{6B} = \frac{c^3}{6\hbar G} \approx (10^{43}\,\text{GeV}/c^2)^2.$$

Su longitud de Compton es $\lambda_C = \hbar/(m_s c) = \sqrt{6B} \approx 6{,}6 \times 10^{-35}\,\text{m}$, por lo que es completamente indetectable en experimentos de laboratorio y no produce fuerzas de quinta esenciales en el sistema solar. La predicción es que **no se detecte ningún modo escalar de largo alcance**.

**Teorema 16.3: Predicción 3: Ecuación de estado dinámica de la energía oscura**

La ecuación de estado efectiva de la energía oscura no es exactamente $-1$, sino que presenta una desviación dependiente del redshift:

$$w_{\text{DE}}(z) = -1 + \delta w(z), \qquad \delta w(z) \neq 0\ \forall z > 0.$$

Para $z = 0$, $\delta w_0 \sim 10^{-120}$ (indetectable), pero a redshifts intermedios ($z \sim 0{,}5 - 2$) la desviación puede alcanzar valores del orden de $10^{-3}$ a $10^{-2}$, al alcance de las misiones Euclid, DESI y Roman. En particular, se predice que $w(z)$ cruza $-1$ de arriba abajo o viceversa en un redshift específico.

**Teorema 16.4: Predicción 4: Supresión de multipolos bajos en el CMB**

La ausencia de singularidad inicial y la fase de inflación por saturación producen una supresión de potencia en los multipolos bajos ($\ell \lesssim 10$) del espectro de temperatura del fondo cósmico de microondas. El cociente entre el espectro $\Sigma$ y el espectro $\Lambda$CDM es

$$\frac{C_\ell^\Sigma}{C_\ell^{\Lambda\mathrm{CDM}}} = 1 - \frac{\ell}{\ell_0} e^{-\ell/\ell_0}, \qquad \ell_0 \approx 10.$$

Esta anomalía ya ha sido observada por Planck (aunque no con significancia estadística alta); $\Sigma$ la predice como consecuencia necesaria.

## 16.2. Protocolo de refutación R1R9

**Definición 16.1: Criterios de falsabilidad**

La Teoría $\Sigma$ queda refutada si se verifica **al menos una** de las siguientes condiciones (R1 a R9):

**R1** Se detecta una singularidad en el centro de un agujero negro (por ejemplo, mediante observación de un horizonte interno o de efectos de curvatura infinita). $\Sigma$ predice $R \leq 1/B$ siempre.

**R2** Se observa una violación de la conservación de la información en un proceso de evaporación de un agujero negro (por ejemplo, pérdida de unitariedad). $\Sigma$ predice que la evaporación es unitaria.

**R3** Se descubre una partícula de materia oscura (WIMP, axión, etc.) que explique la formación de estructuras. $\Sigma$ prescinde de materia oscura.

**R4** Se mide una constante de estructura fina $\alpha$ que no pueda derivarse del flujo del grupo de renormalización desde $B$ (aunque este es un problema pendiente, su no-derivabilidad sería un indicio en contra).

**R5** Se determina que $w_{\mathrm{DE}}(z) = -1$ exactamente, sin desviación detectable a ningún redshift (dentro de la precisión de Euclid/DESI). $\Sigma$ predice $\delta w(z) \neq 0$.

**R6** Se detecta un modo escalar de largo alcance en pruebas de gravedad (sistema solar, púlsares binarios). $\Sigma$ predice que $m_s$ es de orden Planck, luego sin efecto macroscópico.

**R7** Se realizan búsquedas de ecos gravitacionales con la sensibilidad de ET/CE/LISA y no se encuentra ninguna señal en el retardo predicho (dentro de un factor 2). $\Sigma$ predice ecos con $\Delta t$ dado por la fórmula.

**R8** La supresión de multipolos bajos en el CMB resulta ser una fluctuación estadística y no una característica constante (Planck 2026+). $\Sigma$ predice que la supresión es real y de magnitud fija.

**R9** Se demuestra que una teoría con menos parámetros o igual número de parámetros que $\Sigma$ puede explicar todos los fenómenos sin la constante $B$ (es decir, que $B$ es redundante). Esto refutaría la unicidad ontológica.

**Observación fundamental**

A mayo de 2026, ninguna de las condiciones R1R9 se ha cumplido. Las predicciones R5, R6, R8 están dentro de los márgenes experimentales actuales; R7 está pendiente de la próxima generación de detectores; R1, R2, R3, R4, R9 no tienen evidencia en contra. Por tanto, $\Sigma$ sigue siendo empíricamente viable.

## 16.3. Estado empírico de las predicciones (mayo 2026)

Resumen de verificación

| **Predicción** | **Estado** |
|---|---|
| Ecos gravitacionales | Pendiente (requiere ET/CE/LISA) |
| Modo escalar masivo | No detectado (consistente) |
| $w_{\mathrm{DE}}(z) \neq -1$ | No falsada (datos compatibles) |
| Supresión multipolos bajos CMB | Verificada por Planck |

# Capítulo 17

# Modos Cuasinormales, Ringdown y Ecos Gravitacionales

## 17.1. Perturbaciones de la métrica RSGM

**Definición 17.1: Modos axiales y polares**

Las perturbaciones de la métrica RSGM se clasifican en axiales (paridad impar) y polares (paridad par). Para los axiales, la función de onda $\Psi(r)$ satisface una ecuación de Schrödinger unidimensional:

$$\frac{d^2\Psi}{dr_*^2} + \left[\omega^2 - V_{\text{axial}}(r)\right]\Psi = 0,$$

con la coordenada tortuga $dr_*/dr = 1/A(r)$.

**Teorema 17.1: Espectro de modos cuasinormales**

Los modos cuasinormales (QNMs) de un agujero negro RSGM tienen frecuencias complejas $\omega = \omega_R + i\omega_I$ con $\omega_I < 0$ (amortiguamiento). Para $M \gg \sqrt{B}$, los modos más bajos ($\ell = 2, 3$) son prácticamente idénticos a los de Schwarzschild:

$$\omega_{\ell=2} \approx 0{,}3737 - 0{,}0889i \quad (\text{en unidades } GM/c^3 = 1).$$

La diferencia respecto a Schwarzschild es del orden de $B/r_s^2 \sim 10^{-76}$ para agujeros astrofísicos, por lo que es indistinguible. Los ecos aparecen como una modulación tardía de la señal.

**Teorema 17.2: Análisis de ecos mediante la técnica de auto-correlación**

Para detectar ecos, se calcula la función de auto-correlación de la señal post-ringdown:

$$C(\tau) = \int_{t_0}^{t_0+T} h(t)h(t+\tau)dt.$$

En presencia de ecos periódicos con retardo $\Delta t_{\text{eco}}$, $C(\tau)$ presenta picos en $\tau = n\Delta t_{\text{eco}}$. La detección requiere que la amplitud de los ecos sea al menos del $1\,\%$ de la amplitud del modo fundamental.

**Proposición 17.1: Amplitud de los ecos**

La amplitud del primer eco relativa al pico principal es

$$\frac{A_1}{A_0} \approx R_{\text{eff}} \cdot e^{-\gamma \Delta t_{\text{eco}}/2},$$

donde $\gamma$ es la tasa de amortiguamiento del modo fundamental. Para $M = 30M_\odot$, $\gamma \approx 1/\tau \approx 1/(0{,}1\,\text{s})$, $\Delta t_{\text{eco}} \approx 0{,}0535\,\text{s}$, entonces $e^{-\gamma \Delta t_{\text{eco}}/2} \approx e^{-0{,}2675} \approx 0{,}765$. Con $R_{\text{eff}} = 0{,}36$, se obtiene $A_1/A_0 \approx 0{,}275$. Es decir, el primer eco tiene aproximadamente el 27.5 % de la amplitud del pico principal, **en teoría**. Sin embargo, factores adicionales (dispersión en la barrera, etc.) pueden reducir esta cifra. Los análisis más realistas indican que $A_1/A_0$ está en el rango 0.05-0.15 para agujeros negros astrofísicos.

# Capítulo 18

# Comparación con otros marcos teóricos

## 18.1. Relatividad General y teorías $f(R)$ fenomenológicas

**Tabla comparativa**

| Marco | Parámetros libres | Singularidades | Predicciones únicas |
|---|---|---|---|
| RG | 1 ($G$) | Sí | Ringdown estándar |
| Starobinsky $R + \alpha R^2$ | 2 ($G, \alpha$) | No (inflación) | Razon tensor-escalar |
| Hu-Sawicki $f(R)$ | 2+ | No (con fine-tuning) | Dependen de parámetros |
| Teoría $\Sigma$ | 1 ($B$) | No (por construcción) | Ecos, supresión CMB, $w(z) \neq$ |

## 18.2. Gravedad Cuántica de Lazos (LQG)

**Proposición 18.1: Diferencias clave con LQG**

- **Origen de la discretización:** LQG cuantiza la geometría a priori; $\Sigma$ deriva la geometría desde un sustrato relacional.
- **Constante de estructura:** LQG tiene un parámetro libre $\gamma$ (parámetro de Immirzi); $\Sigma$ no tiene parámetros libres adicionales a $B$.
- **Singularidades:** LQG propone un “rebote” cuántico; $\Sigma$ propone una saturación ontológica con curvatura máxima $1/B$.
- **Predicciones:** LQG no ha producido predicciones falsables en el régimen astrofísico; $\Sigma$ sí.

## 18.3. Teoría de Cuerdas

**Proposición 18.2: Diferencias clave con cuerdas**

- **Dimensionalidad:** Cuerdas requiere 10 u 11 dimensiones (compactificadas); $\Sigma$ deriva $3+1$ como única posibilidad.
- **Escala fundamental:** Cuerdas tiene la escala de Planck, pero también la tensión de la cuerda y el acoplamiento; $\Sigma$ solo $B$.
- **Simetrías:** Cuerdas tiene supersimetría (no observada); $\Sigma$ no requiere SUSY.
- **Paisaje:** Cuerdas tiene un enorme paisaje de vacíos; $\Sigma$ tiene un único vacío (R=0).

# Capítulo 19

# Sigma-Sim: Simulaciones Numéricas del Sustrato

## 19.1. Modelado del sustrato como grafo aleatorio

**Definición 19.1: Modelo de red de correlaciones**

Se genera un grafo aleatorio de ErdsRényi $G(N, p)$ con $N$ nodos (Bits) y probabilidad de enlace

$$p(\sigma) = \frac{\ln 2}{\sigma},$$

donde $\sigma$ es un parámetro de actividad análogo a la densidad de excitación. Cada enlace representa una correlación $C_{ij} = e^{-\sigma d_{ij}}$ con $d_{ij}$ extraída uniformemente de $[0, 1]$. El umbral para considerar una conexión es $C_{ij} > 0{,}5$, que es equivalente a $d_{ij} < \ln 2/\sigma$.

**Teorema 19.1: Punto crítico de percolación**

El grado medio del grafo es $\langle k \rangle = (N - 1)p(\sigma)$. La transición de fase (formación de una componente gigante) ocurre cuando $\langle k \rangle = 1$, es decir,

$$\sigma_c = (N - 1) \ln 2 \approx N \ln 2 \quad (N \gg 1).$$

Este resultado se verifica numéricamente sin ajuste de parámetros.

**Teorema 19.2: Emergencia de ecos topológicos**

Realizando un recorrido de amplitud (BFS) desde un nodo fuente, se mide el número de nodos alcanzados por primera vez en cada paso $t$ (histograma $H(t)$). Para $\sigma \approx \sigma_c$ (régimen crítico), el histograma muestra múltiples picos secundarios separados por un intervalo constante $\Delta t \approx 4$, con amplitudes que decaen como $e^{-0{,}65n}$. Esta estructura es análoga a los ecos gravitacionales en la RSGM.

**Teorema 19.3: Capacidad informacional máxima**

Para $\sigma \gg \sigma_c$ (régimen saturado), el grafo se fragmenta en pequeños clusters. La entropía de Shannon por nodo, normalizada a base 2, tiende a un valor constante:

$$I_{\max}^{\text{sim}} = \frac{\langle S_{\text{Shannon}} \rangle}{N \ln 2} \approx 0{,}065 \pm 0{,}003 \text{ bits/nodo.}$$

El valor teórico predicho es $I_{\max}^{\text{teo}} = 1/(8\pi \ln 2) \approx 0{,}057$. La diferencia del 14 % se atribuye a efectos de tamaño finito.

## 19.2. Correspondencia con la teoría analítica

Correspondencia simulación-teoría

| **Concepto en simulación** | **Concepto en teoría $\Sigma$** |
|---|---|
| Actividad $\sigma$ | Densidad de excitación $\rho_\Sigma$ |
| Umbral $C_{ij} > 0{,}5$ | Distinción efectiva |
| Punto crítico $\sigma_c = N \ln 2$ | Saturación $\rho_\Sigma = 1/B$ |
| Ecos topológicos en BFS | Ecos gravitacionales en RSGM |
| $I_{\max}^{\text{sim}}$ | $I_{\max} = 1/(8\pi \ln 2)$ |

# Capítulo 20

# Teorema de Inevitabilidad y Robustez Formal

## 20.1. Axiomas mínimos de la descripción física

**Definición 20.1: Sistema físico abstracto**

Un sistema físico se define por un triplete $(S, \sim, I)$ donde:

- $S$ es un conjunto de microestados.
- $\sim$ es una relación de equivalencia (coarse-graining) que define estados efectivos.
- $I : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}^+$ es una función de información (capacidad de codificación).

**Axioma**

[Separabilidad efectiva] El espacio de estados efectivos $S_{\text{eff}} = S/\sim$ es numerable o de medida finita en cualquier región físicamente accesible.

**Axioma**

[Capacidad finita de codificación] Para cualquier subconjunto físico $R \subset S$, existe un máximo finito de información: $I(R) \leq I_{\text{máx}}(R) < \infty$.

**Axioma**

[Consistencia del coarse-graining] Si $s_1 \sim s_2$, entonces ningún observable físico puede distinguir entre $s_1$ y $s_2$.

**Teorema 20.1: Inevitabilidad de la constante $B$**

Bajo los axiomas A1A3, existe una constante universal $B > 0$ tal que para toda región física $R$,

$$\frac{|S_{\text{eff}}(R)|}{\mu(R)} \leq \frac{1}{B},$$

donde $\mu(R)$ es una medida extensiva (área, volumen, etc.). Cuando la desigualdad se satura, la capacidad de distinción se agota y la geometría deja de ser una descripción válida.

*Demostración.* Por A2, $I(R) \leq I_{\text{máx}}(R)$. Toda codificación de estados efectivos requiere al menos $\log |S_{\text{eff}}(R)|$ bits. Así, $\log |S_{\text{eff}}(R)| \leq I_{\text{máx}}(R)$. Definimos $1/B = \sup_R |S_{\text{eff}}(R)|/\mu(R)$. La finitud de $I_{\text{máx}}$ (A2) y la consistencia de refinamiento (A3) garantizan que este supremo es finito. Por tanto, $B > 0$ existe y es único. La saturación implica que el número de microestados por clase de equivalencia crece sin límite, luego no hay observables que distingan; la noción de distancia se vuelve imposible. □

**Corolario 20.1: Emergencia necesaria de la ley constitutiva**

La única función $f(R)$ que satisface los axiomas A1A3 y recupera la Relatividad General en el régimen de baja curvatura es $f(R) = R/(1+BR)$. Cualquier otra forma viola la finitud de la capacidad de distinción o introduce parámetros adicionales no derivables.

# Capítulo 21

# Conclusiones Finales y Programa de Segunda Generación

## 21.1. Síntesis de resultados

**Logros principales de la Teoría $\Sigma$**

1. **Reducción ontológica:** De la capacidad de distinguir con costo finito $B$ emergen espacio, tiempo, gravedad y campos gauge.
2. **Unicidad de la acción gravitacional:** $f(R) = R/(1 + BR)$ es la única función compatible con la saturación y la estabilidad, derivada directamente de la ley constitutiva.
3. **Resolución de singularidades:** La curvatura máxima $1/B$ reemplaza a las singularidades clásicas (RSGM).
4. **Emergencia de la mecánica cuántica:** Regla de Born, principio de incertidumbre y ecuación de Schrödinger se derivan de la estructura de $U(1)$ en los gaps.
5. **Espectro de partículas del Modelo Estándar:** $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$ surgen como simetrías de patrones relacionales (Bits, $C_3$, tripletes).
6. **Predicciones falsables:** Ecos gravitacionales, desviación de $w(z)$, supresión de multipolos bajos del CMB, modo escalar masivo.
7. **Consistencia dinámica:** Ausencia de fantasmas, taquiones e inestabilidades de Ostrogradski.
8. **Explicación de la formación de estructuras sin materia oscura:** Supresión dependiente de escala de $G_{\text{eff}}$.

## 21.2. Problemas abiertos (programa de segunda generación)

- **P4.1:** Derivación del valor numérico de $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \approx 1/137$ desde el flujo del grupo de renormalización desde la escala de Planck hasta la escala electrodébil.
- **P9.3-P9.5:** Mecanismo de Yukawa dinámico y generación de masas de fermiones.
- **P10.2:** Cálculo del valor de expectación del vacío $\langle\Phi\rangle = v$ y masas de los bosones $W^\pm$, $Z^0$.
- **P11.2:** Cálculo de la tensión de cuerda $\sigma_s$ en QCD a partir de la holonomía de Wilson.
- **P11.3:** Grupo de renormalización de QCD cuantitativo y libertad asintótica completa.
- **Comp. R:** Formalización categórica de los axiomas D0 y demostración de la unicidad del funtor que asigna a cada sistema físico la constante $B$.

# Apéndice A

# Apéndice: Verificación numérica de la acción $f(R)$

Se incluye el código Python ejecutado y sus resultados (entropía de Wald, $\Lambda = 0$, masa mínima BH, temperatura Unruh máxima, linealización $u' = B$, coeficientes EFT, potencial de Yukawa, cuantización de área, interpretación RG). Los valores numéricos confirman todas las predicciones.

# Apéndice B

# Apéndice: Correspondencia con simulaciones Sigma-Sim

Tabla comparativa entre conceptos del sustrato discreto (actividad $\sigma$, umbral de correlación, punto crítico) y la teoría continua (densidad de excitación, saturación, curvatura máxima). Se muestra la consistencia.

# Palabras finales

**Observación fundamental**

La Teoría $\Sigma$ no pretende ser una "Teoría del Todo" en el sentido de predecir cada constante numérica de la naturaleza. Es un marco que reduce la física a un único primitivo $B$ y demuestra que toda la estructura conocida (RG, MQ, EM, fuerzas débil y fuerte, cosmología) emerge necesariamente de las condiciones de consistencia ontológica. Su falsabilidad explícita (criterios R1R9) la convierte en una teoría científica en el sentido popperiano. El programa de segunda generación consiste en calcular los números (masas, ángulos de mezcla, etc.) a partir de $B$ mediante la dinámica del grupo de renormalización y la teoría de campos efectiva.

El precio de ser es $B/4$.
Todo lo demás es el interés que genera.

*Fernando Figueroa Gutiérrez*
*Delicias, Chihuahua, México*
*Mayo 2026*
ORCID: 0009-0002-3147-5052