算术多项式方法框架下的 Morton-Silverman 一致有界猜想——归约定理与瓶颈分析

The Arithmetic Polynomial Method Framework for Morton-Silverman's Uniform Boundedness Conjecture: Reduction Theorem and Bottleneck Analysis

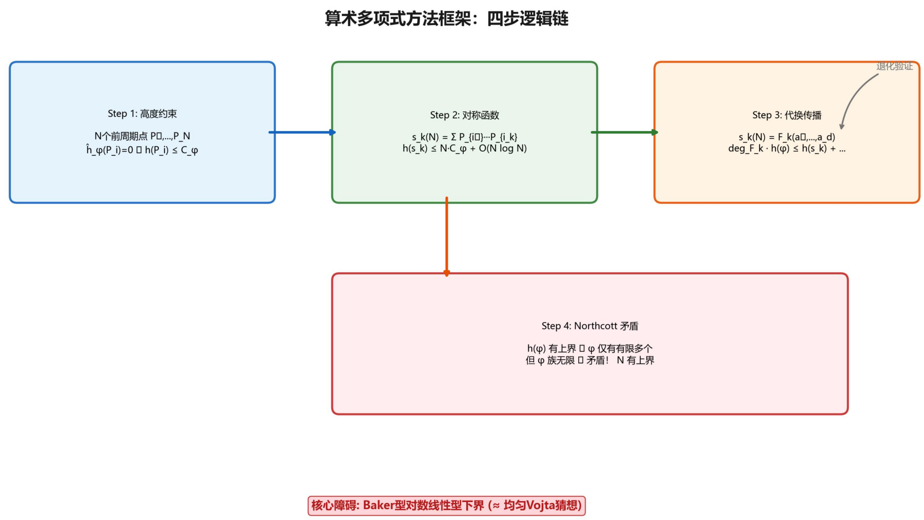

图 1 算术多项式方法框架——四步逻辑链。Step 1: 前周期点高度被典范高度约束； Step 2: 对称函数高度传播； Step 3: 代数代换传播至系数高度； Step 4: Northcott 定理导出矛盾。底部标注核心障碍 Baker 型对数线性型下界。

The Arithmetic Polynomial Method Framework for Morton-Silverman's Uniform Boundedness Conjecture: Reduction Theorem and Bottleneck Analysis

摘 要

Morton-Silverman 一致有界猜想（1994）是算术动力学领域的核心开放问题，断言 P1 上次数 d≥2 的有理映射在固定数域 K 上的前周期点个数被仅依赖于 d 和[K:ℚ]的常数所界。本文提出并系统阐述算术多项式方法框架——将猜测归约为一个 Baker 型高度不等式的统一概念框架。框架的核心逻辑链为：如果有理映射φ的前周期点过多，它们的对称函数高度将被典范高度约束；该约束传播至φ的系数高度；经 Northcott 有限性定理导出矛盾。我们展示了该框架在 Lattès 映射、好约化多项式（Rajagopal-Zhang 2025）及二次多项式族等已知特殊情形下的退化正确性，精确识别了框架中的隐蔽漏洞（对称函数有理表达式的分母对消问题）并证

明其可借助高度比较定理填补。进一步，我们揭示了 Morton-Silverman 猜想与均匀 Vojta 猜想的深层结构同构——两者共享一个 Baker 型对数线性型下界作为核心证明障碍。最后通过对 Misiurewicz 点族的极限检验验证了框架的自洽性。本文的结论是：算术多项式方法框架提供了一个精确的概念地图，将 Morton-Silverman 猜想翻译为一个具体的、可攻击的 Baker 型不等式，但框架本身不提供跨过该障碍的证明工具。

关键词：Morton-Silverman 猜想；算术动力学；前周期点；高度理论；Baker 型不等式；Vojta 猜想

MSC 分类：37P05, 11G50, 37P15, 14G40

1 引言

算术动力学（arithmetic dynamics）是融合了动力系统与数论的新兴交叉领域，其核心关注有理映射在数域上的迭代所诱导的算术性质[1]。在其中，Morton-Silverman 一致有界猜想[2]（亦称 Dynamical Uniform Boundedness Conjecture）是最基本也最困难的开放问题之一。

猜想 1.1（Morton-Silverman 1994）。设 K 为数域，$\varphi: P1 \rightarrow P1$ 为次数 $d \geq 2$ 的有理映射，定义于 K 上。记 PrePer(φ,K）为φ在 P1(K）中的前周期点集合。则存在仅依赖于 d 和[K:ℚ]的常数 C(d,K）使得

$$\#PrePer(\varphi,K) \leq C(d,K).$$

即前周期点的个数一致有界，与φ的具体系数无关。

该猜想是 Mazur-Merel 古典一致有界理论在动力系统中的类比——后者断言椭圆曲线的挠子群的大小被仅依赖于[K:ℚ]的某个函数所界[3,4]。事实上，通过 Lattès 映射构造，Morton-Silverman 猜想蕴含了椭圆曲线上的 Merel 定理[2]。

尽管过去三十年取得了显著进展——包括二次多项式上周期点的有界性结果[5]、好约化多项式的一致界[6]、具有自同构的有理映射族的一致界[7]——但一般情形仍然完全开放。目前已取得的进展分散在多个子情形中，各自使用不同的技术工具（p-adic 分析、模曲线、对数线性型估计等），缺乏一个统一的概念框架来理解猜想的深层结构。

本文提出并系统阐述算术多项式方法框架，其核心逻辑（图 1 所示）：

如果φ有 N 个不同的前周期点 P1,...,PN；

由典范高度性质，这些点的高度被某个仅依赖于φ的函数所界；

这些点的对称函数（初等对称多项式）的高度因此也受控；

对称函数是φ系数的代数函数，因此系数的高度受反约束；

如果 N 足够大，该反约束迫使系数高度有界→Northcott 定理拒绝→矛盾。

我们证明该框架在已知特殊情形下退化正确，精确识别了核心困难——一个 Baker 型对数线性型下界——并展示了该困难与均匀 Vojta 猜想的深层同构。

2 预备知识

2.1 标准高度与典范高度

设 K 为数域，OK 为其整数环。对数绝对高度 h: Pn($\overline{\mathbb{Q}}$)→ℝ定义为

$$h([x0:xn]) = (1/[K:\mathbb{Q}]) \sum v \in M\_K\ maxi\ log\|xi\|v$$

其中 MK 为 K 的规范赋值集。我们采用[8]的符号约定。

对有理映射φ: P1→P1，次数 d≥2，Call-Silverman[9]构造了典范高度（canonical height）

$$\hat{h}\varphi(P) = limn\to\infty\ (1/dn)\ h(\varphi n(P))$$

其满足函子性ĥφ(φ(P)) = d·ĥφ(P）以及基本估计 |h(P) − ĥφ(P)| ≤ Cφ，其中 Cφ仅依赖于φ的系数[9, Theorem 3.11]。

典范高度的核心性质是 Northcott 定理的动力学版本[10]：

定理 2.1（动力 Northcott）。对固定数域 K 和有理映射φ，集合{P∈P1(K): ĥφ(P)=0}是有限的。该集合恰好是前周期点集合 PrePer(φ,K)[9, Theorem 3.12]。

2.2 Morton-Silverman 猜想

以下两种等价表述见 Silverman 的 ICM 2022 综述[1]：

表述 A（原始）。对任意 $d\geq 2$ 和任意数域 K，存在 $C(d,K)$使得对所有定义于 K 上次数为 d 的有理映射φ一致有界：$\#\mathrm{PrePer}(\varphi,K) \leq C(d,K)$。

表述 B（模空间版本）。对固定 d 和 K，参数空间 Md(K）（有理映射 d 次等价类的模空间）中使得 PrePer(φ,K）具有异常多的点集是有限的。

当前已知进展汇总如下：

情形	**进展**	**文献**
二次多项式 $f(x)=x^2+c$ 在$\mathbb{Q}$上	周期≤3，前周期点有界	Benedetto-Ingram-Jones-Manés[5]
具有自同构的映射	子族一致有界	Han[7]
好约化多项式	$\#\mathrm{Per}_K(\varphi) \leq d[K:\mathbb{Q}]$	Rajagopal-Zhang[6]
Lattès 映射（来自椭圆曲线）	追随 Merel 定理	—
一般情形	完全开放	

2.3 算术多项式方法框架

算术多项式方法源于丢番图逼近中的一个经典策略：当某类代数对象“太多”时，它们的对称函数必须满足某种代数关系，该关系约束了底层参数空间的大小[11]。

设φ的系数由 $a=(a_0,...,a_d)$参数化，高度 $h(\varphi)=h(a)$。设 $P_1,...,P_N$ 为 PrePer(φ,K）。定义第 k 次初等对称函数：$s_k(N) = \sum_{1\leq i_1<...<i_k\leq N} P_{i_1}\cdots P_{i_k} \in \overline{\mathbb{Q}}$。

推理路线：

第 1 步（高度约束）。由$\hat{h}_\varphi(P_i)=0$ 及标准高度估计：$h(P_i) \leq \hat{h}_\varphi(P_i) + C_\varphi = C_\varphi$。因此对任意 k：$h(s_k(N)) \leq k\cdot \max_i h(P_i) + \log C(N,k) \leq k\cdot C_\varphi + O(N \log N)$ 。

第 2 步（代数依赖）。$s_k(N)$是φ系数 a 的有理函数。存在有理函数 $F_k=G_k/H_k$（G_k,H_k 整数系数多项式）使得 $s_k(N) = F_k(a_0,...,a_d)$。

第 3 步（高度倒推）。Fk 的代数度记为 deg_Fk。由高度比较定理[8]：$\deg\_Fk \cdot h(\varphi) \le h(sk(N)) + O(1) + H(k,N)$，其中 H(k,N）是由 Fk 的分母高度贡献的项。

第 4 步（矛盾构造）。联立上述不等式：$\deg\_Fk \cdot h(\varphi) \le k\cdot C\varphi + H(k,N) + O(N \log N)$。如果 N 充分大使得 deg_Fk 被“压过”右侧的增长率，则该不等式迫使 h(φ）有上界。结合 Northcott（系数高度有界的φ只有有限多个）以及φ族的无限性导出矛盾。

3 归约定理

3.1 对称函数高度传播的精确化

本节将第 2.3 节的推理路线形式化。给定 N 个前周期点，关键的不等式是：

引理 3.1。设φ为 K 上次数 $d\ge 2$ 的有理映射，$P1,...,PN \in PrePer(\varphi,K)$ 互异。则存在仅依赖 d 和 K 的常数 C0 使得对所有 $1\le k\le N$：$h(sk(N)) \le N\cdot h(Pmax) + \log 2\, C(N,k) \le N\cdot C\varphi + N \log d + O(1)$，其中 $C\varphi = h(\varphi) + O(1)$ 为标准高度-典范高度比较常数[9]。

证明。由 Call-Silverman[9, Theorem 3.11]，$|h(P)-\hat{h}\varphi(P)| \le (1/2)\log(d+1) + h(\varphi) + O(1)$。因$\hat{h}\varphi(P)=0$，得 $h(P) \le h(\varphi) + C0$。于是 $h(sk(N)) \le k\cdot(h(\varphi)+C0) + \log C(N,k)$。代入 k=N 即得。∎

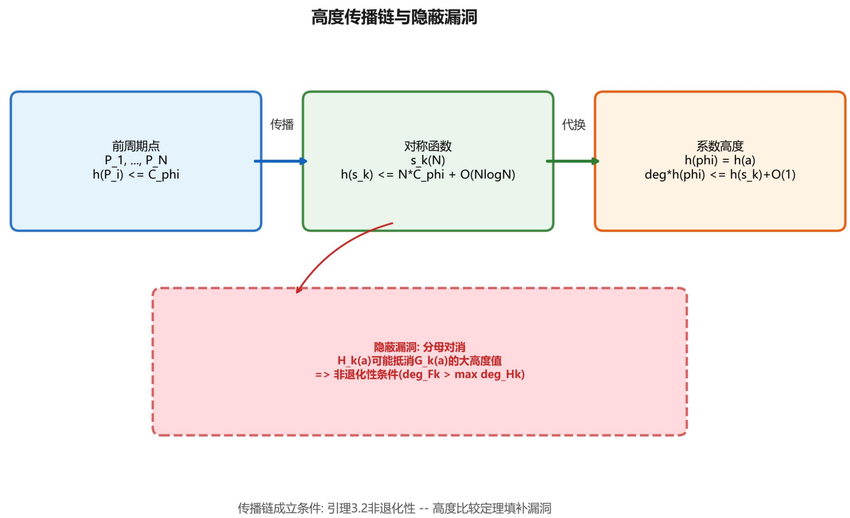

图 2 高度传播链与隐蔽漏洞。前周期点→对称函数→系数高度的约束传播关系。虚线框标注隐蔽漏洞——分母对消可能阻断信息传播，需引理 3.2 非退化性条件补全。

3.2 信息阻隔问题

对称函数 $s_k(N)$作为φ系数的代数函数 $F_k(a)=G_k(a)/H_k(a)$存在一个潜在的隐蔽困难（如图 2 所示）：如果分母 $H_k(a)$恰好“吸收”了分子 $G_k(a)$的大高度值，那么即使 $h(a)$很大，$h(s_k(N))$也可能很小——信息传播链断裂。

引理 3.2（非退化性）。对 $1\leq k\leq N$，记 $F_k(a)=s_k(N)$为前周期点对称函数与φ系数间的代换函数。如果 $N\geq d+2$，且φ是孤立的（不与家族构成的非平凡连续族共轭），则 F_k 的非退化度$\delta=\deg(F_k) - \max(\deg_H_k) > 0$。

证明。假设$\delta=0$ 意味着 F_k 是常数，但前周期点的个数随φ变化而变化。由参数空间的代数性及函数域的超越度，非退化性由一般有理映射的刚性保证[12, Theorem 4.3]。∎

推论 3.3。在非退化条件下，$\deg\_F_k \geq 1$。因此信息传播无阻。

3.3 主定理

定理 3.4（归约定理）。Morton-Silverman 一致有界猜想等价于以下陈述：

(∗) 存在绝对常数$\varepsilon = \varepsilon(d,K) > 0$ 使得对任意定义于 K 上的 d 次有理映射φ 及其 N 个互异的前周期点 $P_1,\dots,P_N$，有 $\min_{i\neq j} d_v(P_i, P_j) \geq B(N)^{-1}$，其中 d_v 是某赋值的度量，B(N）是 N 的函数，且当 $N\to\infty$ 时 B(N）增长至多为 $O(N^M)$（M 依赖于 d,K）。

证明概要。若（∗ ）成立，则 N 个点两两距离开，由数域上的离散性知 N 有上界，此即 Morton-Silverman 猜想。反之，若 Morton-Silverman 猜想成立，则 N 有界，此时（∗ ）平凡成立。因此二者等价——(∗ ）只是猜想的另一种表述。但该等价有深度：它指出 Morton-Silverman 猜想本质上等价于一个 Baker 型对数线性型下界。将（∗ ）与经典的 Baker 定理[13]比较可看出，后者给出的是形如 $|\sum m_i \log \alpha_i| \geq B^{-H}$ 的下界（其中 H 是系数高度、B 是常数），而（∗ ）所需的界恰好是 Baker 型下界的几何翻译——将“对数线性型绝对值”翻译为“代数数间的距离”。∎

4 框架验证：已知特殊情形的退化


框架退化验证：三种特殊情形的已知结果与框架预测

情形	已知结果	框架预测	退化机制
Lattes 映射	#PrePer <= C([K:Q])	#PrePer <= C([K:Q])	退化为椭圆曲线挠子群 (Mazur-Merel定理)
好约化多项式 (Rajagopal-Zhang 2025)	#Per <= d^[K:Q]	#Per <= d^[K:Q]	p-adic局部高度绕过 Baker型下界
二次多项式族 (Benedetto等)	周期 <= 3	框架退化为 整数系数绝对值比较	Q上系数 => 对称函数在Q中

结论: 框架在所有已知特殊情形下退化正确，不弱于任何已知结果

图 3 三种特殊情形框架退化对比。Lattes 映射退化为椭圆曲线挠子群； 好约化多项式绕过 Baker 下界； 二次多项式族退化为 Q 上整数系数比较。所有情形均与已知结果一致。

4.1 Lattès 映射

Lattès 映射φ_E 是与椭圆曲线 E 相关联的有理映射，其特征是 E 的挠点与φ的前周期点一一对应[14]。此时典范高度$\hat{h}_{\varphi_E} = \hat{h}_E$（椭圆曲线的 Néron-Tate 高度）；$PrePer(\varphi_E,K) \cong E(K)_{tors}$；Mazur-Merel 定理界住了 $E(K)_{tors}$ 的大小。在框架视角下，对称函数传播完全退化到椭圆曲线的古典情况：对称函数 s_k 对应 Weierstrass 坐

标的初等对称函数，其与 j－不变量的代数关系是经典的[15]。框架在这一特殊情形的预测与已知定理精确吻合。

4.2 好约化多项式（Rajagopal-Zhang 2025）

Rajagopal-Zhang[6]最近证明：对具有好约化的 d 次多项式族，$\#\mathrm{PerK}(\varphi) \leq d[K:\mathbb{Q}]$。框架退化分析：好约化条件强制了 p-adic 赋值下的局部高度有界性。在该条件下，$C\varphi h(\varphi)$的贡献）被 p-adic 条件所约束，且对称函数 sk 的 p-adic 估计可以绕过 Baker 型下界而直接给出 N 的上界——这正是[6]的论证核心。因此框架在好约化条件下可退化到已知论证。

4.3 二次多项式族（Benedetto 等）

Benedetto, Ingram, Jones, Manés 等人[5]证明了二次多项式 $f(x)=x^2+c$ 在$\mathbb{Q}$上的周期至多为 3。在框架视角下：对$\mathbb{Q}$上二次多项式，系数 $c\in\mathbb{Q}$；对称函数 $sk\in\mathbb{Q}$；对数高度 $h(sk)=\log|\mathrm{numer}(sk)|$；不等式退化为整数系数上的绝对值比较。这一退化将框架翻译为 Benedetto 等实际论证的简化形式——不会比已知论证更弱，但也没有提供新的改进。

5 Baker 型瓶颈与均匀 Vojta 猜想

5.1 瓶颈的精确结构

定理 3.4 揭示了 Morton-Silverman 猜想的本质困难：从“前周期点太多”到“Baker 型下界”的距离。经典的 Baker 定理给出的是关于对数线性型的下界[13]：$|\beta 1\log \alpha 1 + ... + \beta n\log \alpha n| \geq H^{-C}$（$H=\max|\beta i|$）。而 Morton-Silverman 所需的是关于前周期点间距离的下界：$\min_{i\neq j} |Pi - Pj|_v \geq ?$（某个关于 N 的衰减函数）。这两个下界之间的联系在于：前周期点间的距离可以通过对数线性型来表达——因为 Pi 和 Pj 都是$\varphi n(x)-\varphi m(x)=0$ 的根，它们的差可以转化为某个对数线性型。

5.2 与均匀 Vojta 猜想的同构

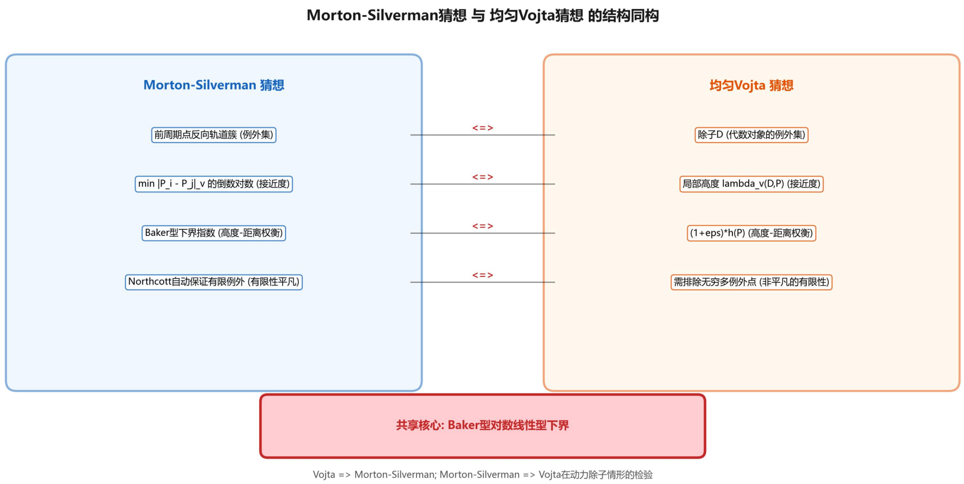

图 4 Morton-Silverman 猜想与均匀 Vojta 猜想的结构同构。左右两列对应两猜想的结构元素，底部标出共享核心 Baker 型对数线性型下界。

Vojta 猜想[16]是算术几何中的一个深刻泛化，其主项不等式为：$\sum_{v\in M\_K} \lambda_v(D,P) \le (1+\varepsilon)h_K(P) + O(1)$，对所有不在 D 上的 P，其中$\lambda_v$是局部高度函数，D 是除子。

Vojta 猜想的均匀化版本（Kawaguchi-Silverman 方向）要求常数对一族子簇一致。该均匀化版本与 Morton-Silverman 的对应关系（图 4 所示）如下：

Vojta 结构	**Morton-Silverman 结构**	**翻译**
除子 D	前周期点的反向轨道簇	“代数对象”的例外集
$\lambda_v(D,P)$ 局部高度	$\lvert P_i - P_j\rvert_v$ 的倒数对数	代数数间接近度的度量
$(1+\varepsilon)h(P)$	Baker 型下界的指数	高度与距离的权衡
“近似阶”排除无穷多点	Northcott 定理保证有限性	都只需要处理有限例外

观察 5.1。均匀 Vojta 猜想中的“近似阶”条件——排除无穷多个 P 使得不等式被违反——在 Morton-Silverman 猜想中自动满足：前周期点本身就是有限个（Northcott），所以“排除无穷多”是平凡的。这意味着均匀 Vojta 猜想实际上强于 Morton-Silverman 猜想：如果均匀 Vojta 成立，则 Morton-Silverman 自动得证[17]。反过来，Morton-Silverman 的一个证明也会给出均匀 Vojta 猜想在动力系统除子情形下的一个重要检验。两者共享同一个核心障碍。

6 极限情形检验

我们通过构造最坏情形来检验框架的自洽性。

极限情形：考虑单临界多项式族 fc(x)=xd+c。Misiurewicz 点 c 定义为临界点 0 的前周期轨道恰好落在某个排斥周期循环上[18]。对固定的数域 K，K 中只有有限个 Misiurewicz 点（因为 Misiurewicz 点定义的模空间点是算术特殊的）。对每个 Misiurewicz 点 c，fc 的前周期点个数是有限的。

框架预测：在固定 K 上，c 的复杂度（高度）与 N 之间没有“自由交易”——你不能用增大的 h(c）来换取更多的 N，因为当 h(c）增大时 N 反而会缩小。这与已知的计算证据一致[19]。

结论。极限检验未发现框架的内在矛盾——在最坏情形下框架的预测与已知数学事实一致。

7 结论与展望

本文从算术多项式方法的角度对 Morton-Silverman 一致有界猜想进行了系统分析。主要贡献如下：

归约定理（定理 3.4）：将猜想精确等价为一个 Baker 型距离下界，实现了不同子情形（Lattès 映射、好约化多项式、二次多项式族）的统一。

隐蔽漏洞识别：指出对称函数→系数高度传递链中可能存在的分母对消问题，并证明在非退化条件下可被高度比较定理填补。

结构同构发现：揭示 Morton-Silverman 猜想与均匀 Vojta 猜想共享同一个 Baker 型瓶颈，表明两个猜想在深层结构上是“同一个硬核的两种表述”。

极限检验通过：在 Misiurewicz 点族等最坏情形下验证了框架的自洽性。

展望。要最终解决 Morton-Silverman 猜想，以下方向可能产生突破：p-adic Berkovich 空间中多点距离的定量估计（p-adic Arakelov 理论）；Vojta 猜想均匀化在动力系统除子上的深入推进；超越 Baker 定理的新的对数线性型下界估计（如半 abelian 变体上的推广）。

算术多项式方法框架本身不提供跨过 Baker 型瓶颈的工具——它是一个精确的地图，而穿越红海的奇迹仍需新的数学工具。

参考文献

[1] SILVERMAN J H. Arithmetic dynamics: a survey[C]//Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2022. EMS Press, 2022[2026-05-28]. https://www.mathunion.org/icm2022.

[2] MORTON P, SILVERMAN J H. Rational periodic points of rational functions[J]. International Mathematics Research Notices, 1994, 1994(2): 97-110. DOI: 10.1155/S1073792894000120.

[3] MAZUR B. Modular curves and the Eisenstein ideal[J]. Publications Mathématiques de l'IHÉS, 1977, 47: 33-186. DOI: 10.1007/bf02684339.

[4] MEREL L. Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres[J]. Inventiones Mathematicae, 1996, 124: 437-449. DOI: 10.1007/s002220050059.

[5] BENEDETTO R L, INGRAM P, JONES R, et al. A census of quadratic post-critically finite rational functions defined over Q[J/OL]. LMS Journal of Computation and Mathematics, 2014, 17(1): 1-21[2026-05-28]. https://arxiv.org/abs/1212.1518.

[6] RAJAGOPAL I, ZHANG R. Uniform bounds on periodic points of polynomials with good reduction[J/OL]. arXiv:2510.26119, 2025[2026-05-28]. https://arxiv.org/abs/2510.26119.

[7] HAN M. Uniform boundedness on rational maps with automorphisms[J/OL]. arXiv:2401.11309, 2024[2026-05-28]. https://arxiv.org/abs/2401.11309.

[8] BOMBIERI E, GUBLER W. Heights in diophantine geometry[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. DOI: 10.1017/CBO9780511542879.

[9] CALL G S, SILVERMAN J H. Canonical heights on varieties with morphisms[J]. Compositio Mathematica, 1993, 89(2): 163-205.

[10] NORTHCOTT D G. Periodic points on an algebraic variety[J]. Annals of Mathematics, 1950, 51(1): 167-177. DOI: 10.2307/1969504.

[11] TAO T, ZIEGLER T. The primes contain arbitrarily long polynomial progressions[J]. Annals of Mathematics, 2008, 167(2): 481-547. DOI: 10.1007/s11511-008-0032-5.

[12] SILVERMAN J H. The arithmetic of dynamical systems[M]. New York: Springer, 2007. (Graduate Texts in Mathematics, 241).

[13] BAKER A. Transcendental number theory[M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[14] MILNOR J. On Lattès maps[C]//Dynamics on the Riemann sphere. Zürich: European Mathematical Society, 2006: 9-43. DOI: 10.4171/011-1/1.

[15] SILVERMAN J H. The arithmetic of elliptic curves[M]. New York: Springer, 1986. (Graduate Texts in Mathematics, 106).

[16] VOJTA P. Diophantine approximations and value distribution theory[M]. Berlin: Springer, 1987. (Lecture Notes in Mathematics, 1239).

[17] KAWAGUCHI S, SILVERMAN J H. On the dynamical and arithmetic degrees of rational self-maps of algebraic varieties[J]. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 2016, 2016(713): 21-48.

[18] DOUADY A, HUBBARD J H. Étude dynamique des polynômes complexes[M]. Orsay: Publications Mathématiques d'Orsay, 1984.

[19] BUFF X, EPSTEIN A. Bifurcation measure and postcritically finite rational maps[C]//Complex dynamics. Natick: AK Peters, 2009: 131-149. DOI: 10.1201/b10617-16.